Eksamen Matematikk R2 2025

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

a)

$$\int_0^1 \left(2e^x + 2x^2\right)\,dx = \left[2e^x + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \tag{1}$$
$$= \left(2e^1 + \frac{2}{3}\cdot 1^3\right) - \left(2e^0 + 0\right) \tag{2}$$
$$= 2e - \frac{4}{3} \tag{3}$$

b) Vi setter $u = x^2 - x - 6$, da er $u' = 2x - 1$. Dermed har vi at

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{u'}{u}\,dx \tag{4}$$
$$= \int \frac{1}{u}\,du \tag{5}$$
$$= \ln|u| + C \tag{6}$$
$$= \ln|x^2 - x - 6| \tag{7}$$

Oppgave 2

f er en antiderivert av f', som betyr at

$$f(x) = \int -\frac{2}{x^3}\,dx = -\int 2x^{-3} = -2\cdot\frac{1}{1-3}x^{1-3} + C = x^{-2} + C$$

Av arealet til det avgrensede området har vi at

$$\int_1^2 f\,dx = \frac{11}{14} \tag{8}$$

$$\Big[-x^{-1} + Cx\Big]_1^2 = \frac{11}{14} \tag{9}$$

$$\Big(-2^{-1} + 2C\Big) - \Big(-1^{-1} + C\Big) = \frac{11}{14} \tag{10}$$

$$C = \frac{11}{14} - \frac{1}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{2}{7} \tag{12}$$

Altså er

$$f(x) = -x^{-2} + \frac{2}{7}$$

Oppgave 3

a) Følgen har 5 elementer og rekursiv formel $a_{i+1} = a_i + i + 2$. Koden vil printe følgende verdier:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 5 \qquad a_3 = 9 \qquad a_4 = 14 \qquad a_5 = 20$$

b) Eleven ønsker å finne summen av de 5 første elementene i følgen.

$$S = 2 + 5 + 9 + 14 + 20 = 50$$

Resultatet blir 50.

a) Vi starter med å sjekke at formelen stemmer for $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1(1+3)}{2} = 2$$

Videre antar vi at formelen stemmer for $n = k$, og sjekker om den stemmer også for $n = k + 1$. I så fall er

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1+3)}{2} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} = \frac{k^2 + 5k + 4}{2}$$

Av den rekursive formelen har vi at

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + k + 2 \\
&= \frac{k(k+3)}{2} + k + 2 \\
&= \frac{k(k+3) + 2(k+2)}{2} \\
&= \frac{k^2 + 3k + 2k + 4}{2} \\
&= \frac{k^2 + 5k + 4}{2}
\end{aligned}$$

Uttrykkene for a_{k+1} er like, og dermed har vi vist det vi skulle vise.

Oppgave 4

a) Amplitude: $2\sqrt{3}$, likevektslinje: $y = 0$, periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$, faseforskyvning: $\frac{\pi}{6}$.

b)

$$2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \tag{13}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \tag{14}$$

Da asin $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, har vi at $(n \in \mathbb{N})$:

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \vee \qquad 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \tag{15}$$

$$x = \pi n \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{3} + \pi n \tag{16}$$

Altså er $x = 0$ eller $x = \frac{\pi}{3}$.

c) Av identiteten $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ ser vi at $f(x) = g(x)$, og at vi derfor har løst den generelle ligningen i oppgave b). Men da $D_f \neq D_g$, må vi legge til løsningene $x \in \{\pi, \frac{\pi}{3} + \pi\}$

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{BC} = [1-2, 4-3, 1-0] = [-1, 1, 1] \tag{17}$$
$$\overrightarrow{AB} = [2, 3, 0] \tag{18}$$
$$\overrightarrow{AC} = [1, 4, 1] \tag{19}$$

$$BC^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \tag{20}$$
$$AB^2 = 13 \tag{21}$$
$$AC^2 = 18 \tag{22}$$

Skal en trekant ha en vinkel større enn 90°, følger det av cosinussetningen at kvadratet av den lengste siden er større enn summen av kvadratene av de to andre sidene. Dette er tilfelle her.

b) Vi har at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(3 \cdot 1 - 0) - \vec{e}_y(2 \cdot 1 - 0) + \vec{e}_z(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) \\ &= [3, -2, 5]\end{aligned}$$

Arealet er da

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$$

Vi har at

$$\overrightarrow{ED} = [1, 4, 1]$$

Linja $l(t)$ som beskriver planten er dermed gitt som

$$l(t) = [2, 3, 2] + t[1, 4, 1]$$

Retningsvektoren til linja er parallell med $\overrightarrow{AC}$, som betyr at linja bare skjærer trekanten hvis den skjærer $\overrightarrow{AB}$. Av parameteriseringen ser vi at det eneste punktet på linja som har $z = 0$ er $(0, -5, 0)$, og dette punktet ligger ikke på $\overrightarrow{AB}$. Altså vil greina aldri treffe bordplata.