Eksamen R2 Våren 2024

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} -x^3 + 3x\,dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\\ &= -\frac{1}{4}0^4 + \frac{3}{2}\cdot 0^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\\ &= -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

b) Vi har at $f'(x) = -2x^2 + 3$, som betyr at f har maksimalpunkt og minimumspunkt når $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dette betyr at f er enten voksende eller synkende på hele intervallet $[-1, 1]$, og dermed vil tallverdien til $\int_{-1}^{0} f\,dx$ representere arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = -1$ og $x = 0$. Tilsvarende får vi for tallverdien til $\int_0^1 f\,dx$. Tallverdien til det bestemte integralet i oppgave a) er den samme for $x = \pm 1$, fordi alle leddene med x har partalls eksponent. Dette betyr at $|\int_{-1}^{0} f\,dx| = |\int_0^1 f\,dx|$, og da er arealet spurt om i oppgaven lik $2\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.

Oppgave 2

Vi setter $u = \sin x$, da er $u' = \cos x$. Av kjerneregelen har vi da at

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x\,dx &= \int u^3 u'\,dx\\ &= \int u^3\,du\\ &= \frac{1}{4}u^4 + C\\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x + C\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Eleven prøver å finne ut hva n er når summen av den aritmetiske rekka

$$2 + 6 + 10 + ... + a_n$$

passerer 200.

b) Da koden ser ut til å gi det rett svar, gjenstår det for oss å finne n. Den eksplisitte formelen til rekka er $a_i = 2 + 4(i-1)$. Av formelen for summen S_n til en aritmetisk rekke har vi at

$$S_n = n \cdot \frac{2 + a_n}{2} = n\frac{(2 + 2 + 4(n-1))}{2} = 2n^2$$

Når $S_n > 200$ er altså

$$\begin{aligned} 2n^2 &> 200 \\ n^2 &> 100 \\ n &> 10 \end{aligned}$$

Dette betyr at når $n = 11$ så passerer summen 200.

Oppgave 4

a) Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [4-1, 1-1, 1-0] = [3, 0, 1]$$

$$\overrightarrow{AC} = [1, -1, -1]$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= [0(-1) - (-1)1, -(3(-1) - 1 \cdot 1), 3(-1) - 1 \cdot 0] \\ &= [1, 4, -3] \end{aligned}$$

Arealet til trekanten er gitt som

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

b) Avstanden fra punktet C til linja gjennom A og B tilsvarer høyden i trekanten med segmentet AB som grunnlinje. Vi har at $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Altså er høyden h gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{26}}{2} &= \frac{\sqrt{10} \cdot h}{2} \\ h &= \sqrt{\frac{13}{5}} \end{aligned}$$

c) En linje med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ som retningsvektor vil stå vinkelrett på α. Dermed kan l parameteriseres som

$$l : \begin{cases} x = -2 - 1t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

d) **Løsningsmetode 1**
Skal m være parallell med α må vektoren $P - (0,0,z) = [-2,1,4-z]$ stå vinkelrett på $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, om er en normalvektor til α. Dette betyr at

$$\begin{aligned} [-2,1,4-z] \cdot [1,4,-3] &= 0 \\ -2 + 4 - 12 + 3z &= 0 \\ z &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Altså er $D = (0,0,\frac{3}{10})$.

Løsningsmetode 2
α kan parameteriseres som

$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = 1 - s \\ z = t - s \end{cases}$$

Når α skjærer z-aksen har vi at

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 3t + s \\ 0 &= 1 - s \end{aligned}$$

Altså er $s = 1$ og $t = -\frac{2}{3}$. α skjærer altså z-aksen i $E = (0,0,-\frac{5}{3})$. Avstanden fra D til E tilsvarer avstanden fra P til α langs z-aksen. Når $x = -2$ og $y = 1$ har vi at

$$\begin{aligned} -2 &= 1 + 3t + s \\ 1 &= 1 - s \end{aligned}$$

Altså er $s = 0$ og $t = -1$, og da er $z = -1$. Avstanden fra P til α langs z-aksen er derfor $4 - (-1) = 5$, og da er $D = (0,0,\frac{10}{3})$

Oppgave 5

a) Når $f(x) = 0$ er

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da $\operatorname{asin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ har vi at

$$\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \vee \qquad \frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$. Altså er

$$x = 3 + 12n \qquad \vee \qquad x = 7 + 12n$$

Følgelig er $x \in \{3, 7, 15, 19\}$.

b) En sinusfunksjon $g(x) = a\sin(kx + c) + d$ har amplitude $|a|$, periode $P = \frac{2\pi}{k}$, fase c og likevektslinje d. For f har vi at

$$\begin{aligned} |a| &= 2 \\ P &= 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12 \\ c &= -\frac{\pi}{3} \\ d &= -1 \end{aligned}$$

Forskyvningen langs likevektslinja tilsvarer avstanden mellom et punkt på grafen til $h(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 1$ og et samsvarende punkt på grafen til f. Kjernen til h blir 0 når $x > 0$. Det samsvarende punktet på grafen til f får vi i det første tilfellet når kjernen til f blir 0 for $x \geq 0$, altså når

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

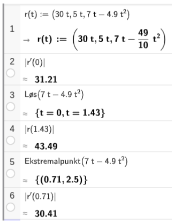
Altså er forskyvningen langs likevektslinja lik 2.

Oppgave 1

a) Farten er ca. 31.21 m/s. idet ballen blir skutt (celle 2).

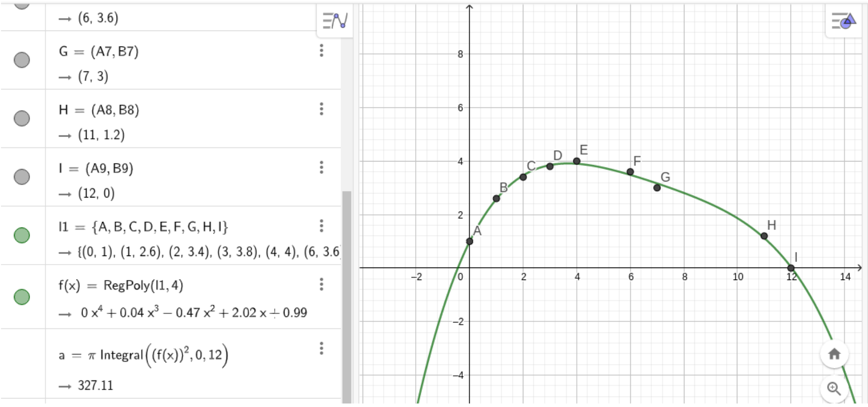
b) Når ballen treffer banen er $z = 0$, og da er $t \approx 1.43$ (celle 3). Da er ballen ca 43.5 meter unna hjørnet (celle 4).

c) Ballen er på sitt høyeste når z har sin høyeste verdi, som er når $t \approx 0.71$ (celle 5). Da er farten ca. 30.41 m/s (celle 6) og høyden 2.5 m (celle 5)



Oppgave 2

Ut i fra figuren leser vi av noen omtrentlige punkt, og bruker regresjon. Her nøyer vi oss med å se på grafen for å avgjøre hva som er en god tilnærming, og ender da med et 4. grads polynom. Bruker så formelen for volumet til et omdreiningslegeme, og finner at volumer ca. er 327 cm^3.



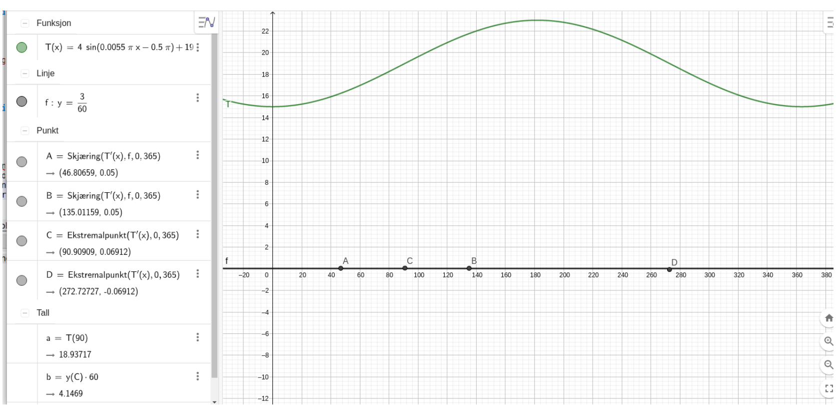
	A	B
1	0	1
2	1	2.6
3	2	3.4
4	3	3.8
5	4	4
6	6	3.6
7	7	3
8	11	1.2
9	12	0

Oppgave 3

a) Ut ifra figuren ser vi at T er tilnærmet periodisk mellom 0 til 365, altså i løpet av et år, og at V_f er tilnærmet $[15, 19]$. I tillegg er $T(90) \approx 19$ (rad 7), hvor $x = 90$ tilsvarer 1. april.

b) $T'(x)$ gir endringen minutter per dag og 3 minutter tilsvarer $\frac{3}{60}$ time. Denne endringen skjer i løpet av dag $x = 46$ og dag $x = 135$, som tilsvarer 15. februar og 15. mai (rad 3 og rad 4). (Vi har bare tatt hensyn til den positive endringen. Fremgangsmåten for å finne den negative endringen er helt lik).

c) Den største endringen er når $T'(x)$ har sitt toppunkt, som er i løpet av dag $x = 90$ (rad 5). Da er endringen på ca. 4 minutter per dag. (rad 8). (Vi har bare tatt hensyn til den positive endringen. Fremgangsmåten for å finne den negative endringen er helt lik.)



Oppgave 4

a) Kubikktall nr n er lik n^3. Altså er rekursiv formel

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$

Regresjonsanalysen gir at $R^2 = 1$ når eksplisitt formel er

$$S_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

b)

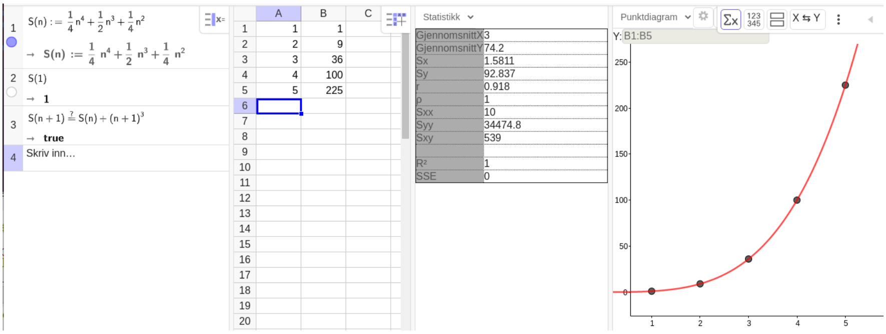
```python
S = 1

# for-løkke fra 2-50
for n in range(2, 51):
  S = S + n**3

print(S)
```

Utdata
1625625

c) Uttrykket stemmer for $S_1 = 1$ (celle 2). Vi antar at uttrykker stemmer for S_n, og sjekker om det da stemmer for S_{n+1}, som det gjør (celle 3).



Oppgave 5

a) I celle 3 finner vi sentrum i sirkelen, og i celle 4 finner vi radien til sirkelen. I celle 5 definerer vi ligningen til γ. Den minste avstanden mellom sirkelen og planet er avstanden mellom sentrum i sirkelen og planet, fratrekt radien til sirkelen. Vi definerer normalvektoren til γ i celle 5, og bruker formelen for avstanden mellom et punkt og et plan. Den minste avstanden mellom sirkelen og planet er $4 - \sqrt{6}$ (celle 6)

b) Da γ og α er parallelle, er en normalvektor til γ også en normalvektor til α. I avstandsformelen ersatter vi -14 med d, og finner verdien til d som gir at avstanden er den samme (celle 7). Da får vi at α er gitt ved ligningen

$$x + 2y + 2z + 10 = 0$$