

**Oppgave 1**

Vi setter  $u = 4x$  og  $v' = \cos x$ . Da er  $u' = 4$  og  $v = \sin x$ . Ved delvis integrasjon er

$$\begin{aligned}\int 4x \cdot \cos x \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= 4x \sin x - \int 4 \sin x \, dx \\ &= 4(x \sin x + \cos x)\end{aligned}$$

**Oppgave 2**

Volumet  $V$  til et omdreiningslegemet er

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{10} f^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^{10} x + 4 \, dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2}10^2 + 4 \cdot 10 \right] \\ &= 90\pi \\ &\approx 270\end{aligned}$$

$270 \text{ cm}^3 = 0,27 \text{ dm}^3 = 2,7 \text{ dL}$ . Det er plass til 2,7 dL i koppen. (Dette virker som et rimelig svar siden et melkeglass inneholder ca. 2 dL).

**Oppgave 3**

- a) Integralet til  $f$  er positivt for  $x \in [-2, 0]$  og negativt for  $x \in [0, 1]$ .  
Dermed er det alternativ 4 som gir arealet.
- b) Vi har at

$$\int x^3 + x^2 - 2x \, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

Arealet  $A$  er dermed

$$\begin{aligned} A &= \left[ x^2 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 \right) \right]_{-2}^0 - \left[ x^2 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 \right) \right]_0^1 \\ &= -(-2)^2 \left[ \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{3} \cdot (-2) - 1 \right] - \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right] \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

- c) Hvis  $a$  ligger mellom  $-2$  og ca  $-0,6$ , vil arealet over  $x$ -aksen være større enn arealet under  $x$ -aksen. Men hvis  $a < -2$ , vil summen av areal under  $x$ -aksen økes. For riktig valg av  $a < -2$  vil summen av areal over  $x$ -aksen være lik summen av areal under  $x$ -aksen, og da vil integralet være lik 0. For at dette skal skje må vi ha at

$$\int_a^{-2} f \, dx \approx \int_{-2}^{0,6} f \, dx$$

Dette vil gjelde for  $a \approx -3,7$ .

## Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} \sin x - \sqrt{3} \cos x &= 0 \\ \frac{\sin x}{\cos x} &= \sqrt{3} \\ \tan x &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Da  $\operatorname{atan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ , er

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

Dermed er

$$x \vee \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$$

- b) På intervallet  $x \in [0, 2\pi)$  har likningen  $\sin x - \frac{1}{2}$  løsningene  $x = \frac{\pi}{6}$  og  $\frac{5\pi}{6}$ . Hvis  $a = \frac{1}{2}$ , har den originale likningen fortsatt bare to løsninger. På intervallet  $[0, 2\pi)$  har likningen  $\sin x \pm 1$  løsningen  $\mp \frac{\pi}{2}$ . Hvis  $a = \pm 1$ , har altså den originale likningen tre løsninger. For alle andre  $a \in [0, 1)$  har den originale likningen fire løsninger.

## Oppgave 5

### Påstand 1

Antar her at 'fartsgraf' viser til grafen til en funksjon  $v(t)$  som gir farten  $v$  etter  $t$  tidsenheter. Akselerasjonen vil i så fall være gitt som  $v'(t)$ , mens arealet under fartsgrafen ville være gitt som  $\int v \, dt$ . Påstanden er dermed usann.

### Påstand 2

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 36^\circ$$

Påstanden er sann.

## Oppgave 6

a) Den eksplisitte formelen for den aritmetisk rekka er

$$a_i = -3 + 3(i - 1) = 3(i - 2)$$

Når  $a_i = 69$ , har vi at

$$69 = 3(i - 2) \tag{1}$$

$$23 = i - 2 \tag{2}$$

$$25 = i \tag{3}$$

Altså har rekka 25 ledd. Da er

$$S_{25} = 25 \frac{-3 + 69}{2} = 825$$

b) Kvotienten til rekka er  $\frac{1}{2} - x$ . Rekka er konvergent når

$$\left| \frac{1}{2} - x \right| < 1, \text{ altså når } x \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

c) Bortsett fra for høyden 2 m, vil ballen bevege seg den samme høyden to ganger. Hvis vi legger til at ballen startet med å bli kastet 2 m fra bakken, vil den totale lengden ballen har beveget seg være gitt ved den geometriske rekka

$$4 + 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \dots + 4 \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{i-1}$$

Dette er en uendelig konvergent geometrisk rekke med sum

$$S_\infty = \frac{4}{1 - \left( \frac{3}{4} \right)} = 16$$

Siden ballen egentlig ikke startet fra bakken, men fra 2 m over bakken, har den beveget seg 14 m.

## Oppgave 7

a) Vi fullfører kvadratene:

$$z^2 + 2z = (z + 1)^2 - 1 \quad (4)$$

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \quad (5)$$

Altså er

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4 \quad (6)$$

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 3^2 \quad (7)$$

Dette er en kuleflate med sentrum  $(2, 0, -1)$  og radius 3.

b) Vi har at

$$\overrightarrow{KP} = [3 - 1, -1 - (-1), 3 - 3] = [2, 0, 0]$$

Siden  $\alpha$  tangerer kulen i  $P$ , er  $\overrightarrow{KP}$  en normalvektor til  $\alpha$ . Da er likningen til  $\alpha$  gitt som

$$2(x - 3) = 0$$

c) Av likningen ser vi at  $\vec{n} = [3, 1, -2]$  er en normalvektor til planet. Videre har vi at

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

Hvis  $\beta$  skal skjære  $K$ , må dette bety at avstanden mellom sentrum i  $K$  og  $\beta$  er mindre enn 3. Av likningen for avstanden mellom et plan og et punkt har vi at

$$\left| \frac{3 - 1 + (-2) \cdot 3 + 1}{\sqrt{14}} \right| = \frac{3}{\sqrt{14}} < \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

Dermed er avstanden mindre enn 3, som betyr at  $\beta$  skjærer  $K$ .

## Oppgave 8

Vi sjekker først at påstanden stemmer for  $n = 0$ :

$$1 = \frac{4^{0+1} - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Deretter antar vi at påstanden stemmer for  $n = k$ , og ønsker å vise at den da også stemmer for  $n = k + 1$ . I så fall er

$$\frac{4^{k+1} - 1}{3} + 4^{k+1} = \frac{4^{k+1+1} - 1}{3} = \frac{4^{k+2} - 1}{3}$$

Vi har at

$$\frac{4^{k+1} - 1}{3} + 4^{k+1} = \frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} \quad (8)$$

$$= \frac{4^{k+1}(1 + 3) - 1}{3} \quad (9)$$

$$= \frac{4^{k+2} - 1}{3} \quad (10)$$

$$= \frac{4^{k+2} - 1}{3} \quad (11)$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

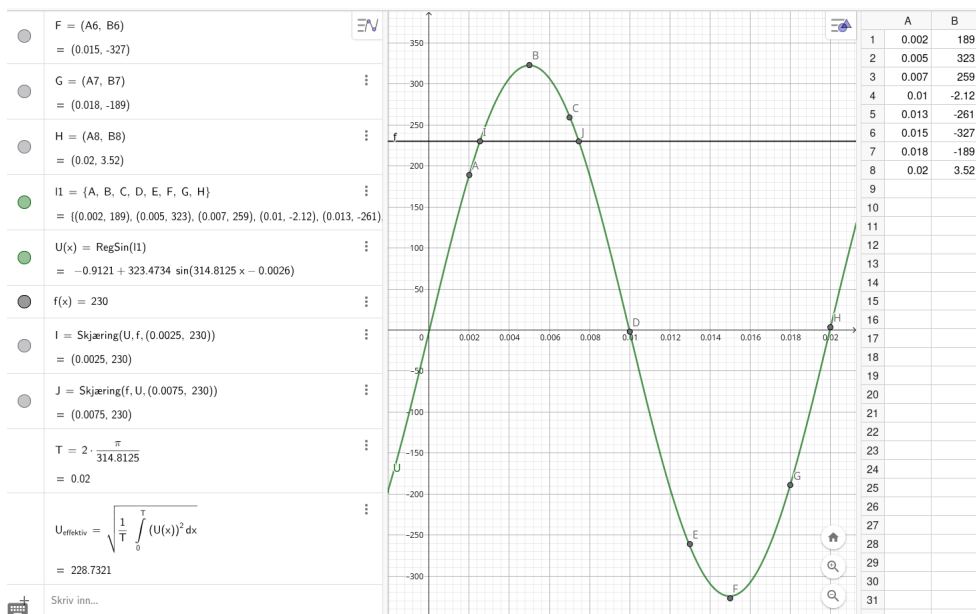
## Oppgave 1

- a) Farten er den deriverte av posisjonsvektoren. I celle 2 finner vi at for  $t = 2$  er farten er ca. 10,3 m/s.
- b) I celle 3 finner vi bunnpunktet til  $z$ -komponenten til  $\vec{r}$ . På det dypeste er båten 312,5 m under havoverflaten.
- c) Vi lar  $\vec{r}$  og  $\vec{s}$  gi posisjonen til sentrum i henholdsvis båten og fiskes-  
timen. Da må  $|\vec{r} - \vec{s}| < 15 + 4 = 19$  for at båten potensielt treffer  
stimen. Av celle 6 ser vi at dette ikke er tilfellet.

|                                  |                                                                            |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1                                | $r(t) := (6t, 7t, -250 - 5t + 0.1t^2)$                                     |
| <input checked="" type="radio"/> | $\approx r(t) := (6t, 7t, 0.1t^2 - 5t - 250)$                              |
| 2                                | $ r'(2) $                                                                  |
| <input type="radio"/>            | $\approx 10.3$                                                             |
| 3                                | Ekstremalpunkt( $-250 - 5t + 0.1t^2$ )                                     |
| <input type="radio"/>            | $\approx \{(25, -312.5)\}$                                                 |
| 4                                | $s(t) := (40 + 2t, 60 + 2t, -250)$                                         |
| <input type="radio"/>            | $\rightarrow s(t) := (2t + 40, 2t + 60, -250)$                             |
|                                  | $ r(t) - s(t) $                                                            |
| 5                                | $\rightarrow \frac{1}{10} \sqrt{t^4 - 100t^3 + 6600t^2 - 92000t + 520000}$ |
| 6                                | Min(\$5, 0, 60\$)                                                          |
| <input type="radio"/>            | $\rightarrow (8.39, 39.83)$                                                |

## Oppgave 2

- a) Vi lager en liste av punkt, og ser at  $U$  kan tilnærmes ved en sinusfunksjon. Bruker derfor **RegSin**, for å finne uttrykket for  $U$  ( $x$  er variabel i stedet for  $t$ ).
- b) Ser av grafen at  $U(t) = 230$  for to  $t$ -verdier på intervallet  $[0, 0,02]$ . Definerer  $f(x) = 230$ , og bruker **Skjæring**. Finner da at  $U = 230$  når  $t = 0,0025$  og  $t = 0,0075$ .
- c) Av bølgetallet til sinusfunksjonen finner vi perioden  $T$ . Kvadratroten av integralet gir at  $U_{\text{effektiv}} \approx 229$ , noe som tyder på at målingene er rette.



### Oppgave 3

- a) Totalt antall enheter etter  $i$  døgn er gitt ved den geometriske rekka

$$2 + 2 \cdot 0.72 + 2 \cdot 0.72^2 + \dots + 2 \cdot 0.72^{i-1}$$

Vi skriver inn summen  $S_i$  til denne rekka i CAS, og finner at  $S_i = 10$  når  $i \approx 11.6$ . Altså kan Sofie sove der i 11 netter får antall enheter når et potensielt farlig nivå. (celle 1).

- b) I artikkelen antas det at den uendelige konvergente geometriske rekka med første ledd lik 2 og kvotient  $k$  har sum 10. I så fall er  $k = \frac{4}{5} = 0.8$ , som betyr at det antas at det skilles ut 20% enheter hvert døgn.

## Oppgave 4

- a) Begge metodene tilnærmer integralet ved å finne summen av små rektangler. Siden  $f$  er en strengt voksende funksjon, bruker `areal_til_hoyre` den høyeste  $f$ -verdien på hvert delintervall, mens `areal_til_venstre` bruker den laveste  $f$ -verdien. Dermed vil `areal_til_hoyre` bestå av rektangler som ligger over grafen til  $f$ , og gi en litt for høy verdi, mens `areal_til_venstre` vil bestå av rektangler som ligger under grafen til  $f$ , og gi en litt for lav verdi.

### b) Alternativ 1

```
1 start = 0
2 slutt = 2
3 n = 100
4 dx = (slutt-start)/n
5
6 def f(x):
7     return 3**2*(2*x)
8
9 def areal_til_hoyre():
10     areal = 0
11     for i in range(n):
12         x = start + i*dx
13         areal = areal + f(x)*dx
14     return areal
15
16 def areal_til_venstre():
17     areal = 0
18     for i in range(1, n+1):
19         x = start + i*dx
20         areal = areal + f(x)*dx
21     return areal
22
23 def bedre_metode():
24     return (areal_til_hoyre() + areal_til_venstre()) / 2
25
26 print(bedre_metode())
```

**Utdata**

35.99999999999999

## Alternativ 2

Vi implementerer Trapes-metoden:

```
1 start = 0
2 slutt = 2
3 n = 100
4 dx = (slutt-start)/n
5
6 def f(x):
7     return 3**2*(2*x)
8
9 def bedre_metode():
10     areal = 0
11     for i in range(n):
12         x_0 = start + i*dx
13         x_1 = x_0+dx
14         areal += f(x_0) + f(x_1)
15     return dx/2*areal
16
17 print(bedre_metode())
```

**Utdata**

36.0