Eksamen R2 Høsten 2023 Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 2x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

Dette svart forteller at arealet avgrenset av grafen til $x^3 + 2x$ og x-aksen er like stort på begge sider av x-aksen på intervallet $[-1, 1]$.

Oppgave 2

x-verdiene til de to skjæringspunktene gjenkjenner vi som $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = -\frac{3\pi}{4}$ (fordi da er $\cos x = \sin x$). Da $\cos x \geq \sin x$ for $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, er arealet til det fargede området gitt som

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\,dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Oppgave 3

a) Da summen av den uendelige rekka er 8, og $a_1 = 4$, har vi av formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke at

$$8 = \frac{4}{1-k}$$

Altså er $k = \frac{1}{2}$, og dermed har vi av formelen for summen av en geometrisk rekke at

$$S_4 = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{2}$$

b) Den eksplisitte formelen for ledd i i en aritmetisk rekke er $a_i = a_1 + d(i-1)$, og dermed har vi at

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 6d) = 3a_1 + 9d = 3(a_1 + 3d) = 3a_4$$

Altså er

$$3a_4 = 114$$
$$a_4 = 38$$

Oppgave 4

a) Ut ifra koeffisientene foran x, y og z i likningene til planet, har vi at $[1, -2, 2]$ er en normalvektor til α. En parameterframstilling l for linja gjennom A som står normalt på planet α er dermed gitt som

$$l : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \tag{1}$$

b) Vi bruker formelen for avstanden h mellom et punkt og et plan, og får at

$$h = \frac{|4 + 2(-2) + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2) + 2^2}} = \frac{5}{3}$$

Oppgave 5

a) Eleven ønsker å finne det samlede arealet avgrenset av grafen til $f(x) = x^2 - 1$ og x-aksen på intervallet $[-2, 2]$. Dette fordi eleven i skriptet

- definerer nevnte funksjon og intervall.
- ved bruk av en for-løkke tilnærmer integralet $\int_{-2}^{2} |f|\, dx$, som gir det nevnte arealet.

b) På intervallet $[-2, 2]$ er $f(x) = x^2 - 1$ positiv når $|x| > 1$ og negativ når $|x| < 1$. Følgelig er

$$\int_{-2}^{2} |f|\, dx = \int_{-2}^{-1} f\, dx + \int_{-1}^{1} -f\, dx + \int_{1}^{2} f\, dx$$

Vi har at

$$\int x^2 - 1\, dx = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{4}{3}$$

$$-\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2} = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

Av summen av de bestemte integralene har vi at

$$\int_{-2}^{2} f\, dx = 4$$

Kommentar: Vi kunne spart oss litt utregning ved å poengtere at $\int_{-2}^{2} |f|\, dx = \int_{-2}^{2} f\, dx + 2\int_{-1}^{1} f\, dx$

Oppgave 6

$O(0{,}0{,}0), A(4{,}0{,}0), B(4, 4{,}0), C(0, 4{,}0), D(1{,}1, 3), E(3{,}1, 3), F(3, 3, 3) og G(1, 3, 3)$.
Vi har at

$$\overrightarrow{BC} = (0-4, 4-4, 0-0) = (-4, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{BF} = (-1, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{GC} = (-1, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{GF} = (2, 0, 0)$$

Videre er

$$\overrightarrow{BC} \times \vec{BF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [0 \cdot 3 - 0(-1), -((-4)3 - (-1)0), (-4)(-1) - (-4)0] = [0, 12, 4]$$

$$\overrightarrow{GC} \times \vec{GF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, -6, -2]$$

$$2A_{\triangle BCF} = \left|\overrightarrow{BC} \times \vec{BF}\right| = 4\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = 4\sqrt{10}$$

$$2A_{\triangle GCF} = \left|\overrightarrow{GC} \times \overrightarrow{GF}\right| = 2\sqrt{10}$$

Dermed er

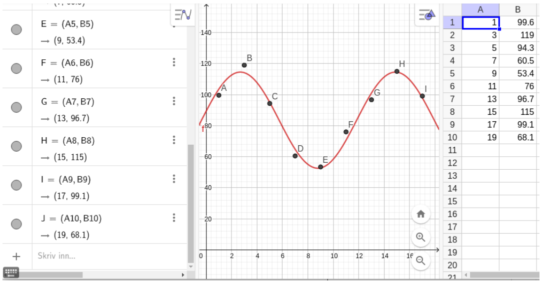
$$A_{\square BCGF} = A_{\triangle BCF} + A_{\triangle GCF} = 2\sqrt{10} + \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Oppgave 1

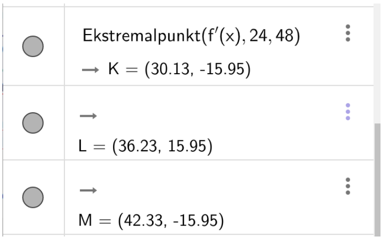
a) Skriver tallene fra tabellen inn i regnearket og lager en liste med punkt. Siden tidevannet er periodisk, bruker regresjon med en sinus-funksjon. Av dette får vi modellen

$$f(x) = 83.55 + 30.97\sin(0.52x + 0.19)$$

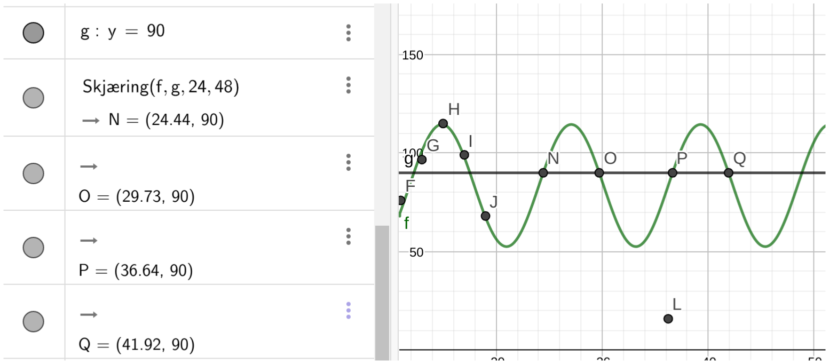
hvor x er antall timer etter midnatt 24. april og f er vannstanden gitt i cm.



b) Den største økningen i vannstand skjer når $f'(x)$ når sitt toppunkt. For å finne ekstremalpunkt 25. april må vi søke på intervallet $[24, 48]$. Finner da at $f'(x)$ har toppunkt når $x \approx 36.5$, altså ca. kl. 12 den dagen.



c) Av inspeksjon av grafen ser vi at vannstanden er synkende i det siste skjæringspunktet mellom f og linja $y = 90$ på intervallet $[24, 48]$. Dette skjæringspunktet er når $x =\approx 42$, som betyr at båten må slepes senest når $x \approx 40$, altså kl. 16:00.



Oppgave 2

a) Det ytre pentagonet i figur n har $5(n-1)$ kuler. Da det ytre pentagonet er det eneste som skiller figur n og figur $n-1$, har vi at

$$P_n = 5(n-1) + P_{n-1}$$

b)

```
P = 1
# for-løkke fra 2-100
for n in range(2, 101):
  P = P + 5*(n-1)
print(P)
```

Utdata
24751

c) **Løsning 1**
Vi har at

$$P_1 = 1 = 1 + 5 \cdot 0$$
$$P_2 = 6 = 1 + 5 \cdot 1$$
$$P_3 = 16 = 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 1 + 5(1+2)$$
$$P_4 = 31 = 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 1 + 5(1+2+3)$$
$$P_5 = 51 = 1 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 1 + 5(1+2+3+4)$$

Av dette ser vi at $P_n = 1 + S_{n-1}$, hvor S_{n-1} er summen av de $n-1$ første naturlige tallene. $S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$, og dermed er

$$P_n = 1 + \frac{5n(n-1)}{2} \tag{2}$$

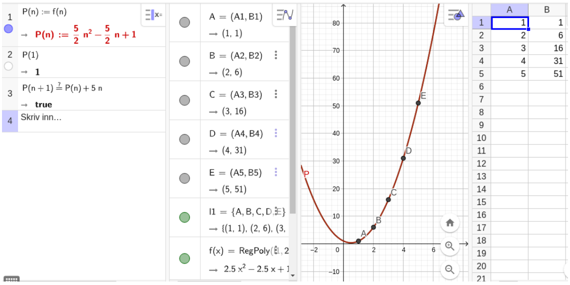
Det er åpenbart at formelen stemmer for $n = 1$. Vi antar at den eksplisitte formelen gjelder for P_n, da kan vi skrive

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} = P_{n+1} &= 5(n+1-1) + P_n \\
&= 5n + P_n \\
&= 5n + 1 + \frac{5n(n-1)}{2} \\
&= 1 + \frac{5n \cdot 2 + 5n(n-1)}{2} \\
&= 1 + \frac{5n(2+n-1)}{2} \\
&= 1 + \frac{5n(n+1)}{2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

(2) samsvarer med (3), og dermed er induksjonsbeviset fullført.

Løsning 2

Bruker regresjon, og finner $P(n) = P_n$ i celle 1. Sjekker at $P(n)$ er sann for $P(n)$ (celle 2). Antar at kravet fra rekursiv formel er oppfylt for $P(n)$, og sjekker at det da er oppfylt for $P(n+1)$. Begge sjekkene stemmer, og dermed er induksjonsbeviset fullført.



Oppgave 3

Vi definerer punktene A, B og C ut ifra opplysningene om tønnen, og bruker deretter regresjon for å finne parabelen f som går gjennom disse tre punktene. Volumet tilsvarer volumet til omdreiningslegemet til f på intervallet $[0, 75]$, som har verdi 437164.4. Da målene er gitt i cm er volumet $437.1644\,\mathrm{dm}^3 \approx 437\,\mathrm{l}$.

Oppgave 4

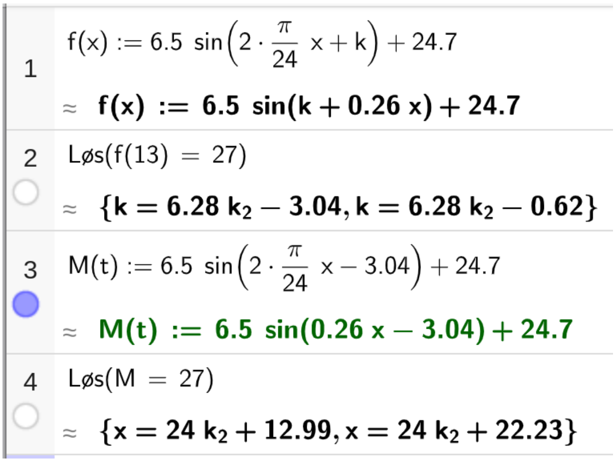
a) Vi har at

$$a = \frac{31.2 - 18.2}{2} = 7.5$$
$$d = \frac{31.2 + 18.2}{2} = 24.7$$

Ut ifra oppgavebeskrivelsen antar vi det menes at M har en periode lik 24. Da er

$$c = \frac{2\pi}{24}$$

b) I CAS-celle 1 definerer vi $f(x)$ til å være $M(t)$ med ukjent k, og løser deretter ligningen $f(13) = 27$ (celle 2). Ved å inspisere grafen til f med fase $k = -0.62$ eller $k = -3.04$, ser vi at $k = -3.04$ passer best til beskrivelsen i oppgaveteksten. Med denne verdien definerer vi $M(t)$ i celle 3, og løser ligningen $M = 27$ (celle 4). Da finner vi at det andre tidspunktet luftforurensingen har verdi 27 er når $t = 22.23$, altså ca. kl. 22:10.



Oppgave 5

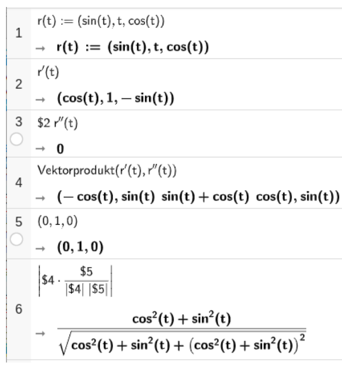
a) Vi definerer $r_1(t)$ som $r(t)$ i CAS (celle 1). Skal en tangent til C være parallell med xy-planet, må z-kordinaten til $r'(t)$ (celle 2) være 0. På intervallet $(0, 2\pi)$ er $\sin t = 0$ bare når $t = \pi$, og dermed er punktet vi søker $r(\pi) = (0, \pi, -1)$.

b) Se celle 3.

c) Cosiniusverdien til vinkelen mellom et plan med normalvektor $\vec{n}$ og en linje med retningsvektor $\vec{a}$ er gitt som

$$\frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|}$$

I celle 4 finner vi en normalvektor til smygplanet. $[0, 1, 0]$ er en retningsvektor (med lengde 1) for y-aksen. Da $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ for alle t, får vi av celle 5 at cosinusverdien er $\frac{1}{\sqrt{2}}$ for alle t. Dette betyr at vinkelen er 45°.



d) Vi definerer $r_2(t)$ (celle 7), og finner en normalvektor til smygplanet (celle 8). I celle 9-13 finner vi cosinusverdien til vinkelen mellom smygplanet og y-aksen, x-aksen og z-aksen. Vi ser da at smygplanet har konstant vinkel mellom alle aksene, og at smygplanet er parallell med y-aksen, fordi cosinusverdien er 0 (celle 9).