Eksamen R1 Våren 2024

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

Bruker produktregelen og kjerneregelen, og får at

$$\begin{aligned}\Big(4x^2 \cdot \ln(3x)\Big)' &= (4x^2)' \ln(3x) + 4x^2(\ln(3x))' \\ &= 8x\ln(3x) + 4x^2 \frac{1}{3x} \cdot 3 \\ &= 4x(2\ln(3x) + 1)\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi setter $\ln x = u$, og får at

$$u^2 - u - 6 = 0$$

Da $2(-3) = -6$ og $2 + (-3) = -1$, har vi at

$$(u+2)(u-3) = 0$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\ln x &= -2 &\quad \vee \quad&& \ln x &= 3 \\ x &= e^{-2} &\quad \vee \quad&& x &= e^3\end{aligned}$$

Oppgave 3

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\infty+1} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-(-\infty)+1} \lim_{x\to-\infty} e^{\infty} = \infty$$

Altså er det bare den øverste grensen som eksisterer.

Oppgave 4

a) Hvis A, B og C ligger på linje, er $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$. Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [-1-3, -2-4] = -2[2,3]$$

$$\overrightarrow{AC} = [t, 2t-4]$$

Da forholdet mellom x-koordinaten og y-koordinaten til $\overrightarrow{AB}$ er $\frac{2}{3}$ har vi at

$$\begin{aligned} \frac{t}{2t-4} &= \frac{2}{3} \\ 3t &= 2(2t-4) \\ t &= 8 \end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ danner en rett vinkel hvis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, som betyr at

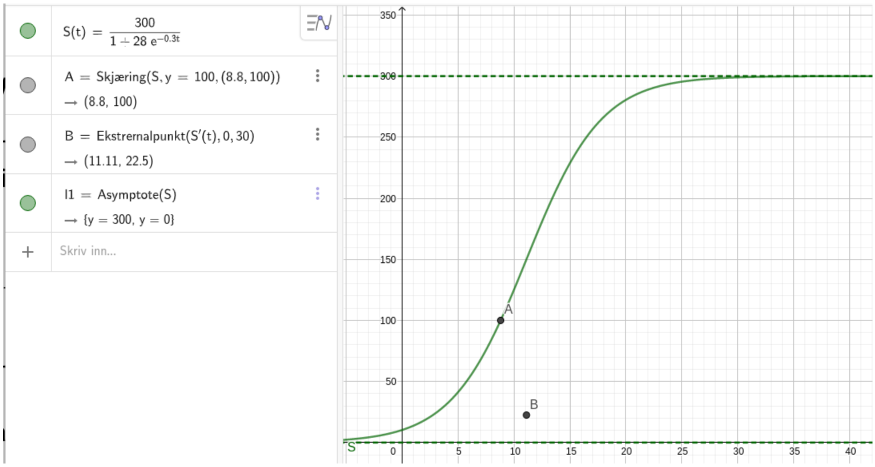
$$\begin{aligned} [2,3] \cdot [t, 2t-4] &= 0 \\ 2t + 3(2t-4) &= 0 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 1

a) Det tar ca. 9 dager før 100 elever er smittet (rad 2).

b) Tidspunktet der flest blir smittet er der $S'(t)$ har sitt maksimum, som er når $t \approx 11$ (rad 3). Flest blir altså smittet rundt dag 11, og da blir mellom 22 til 23 elever smittet per dag.

c) For $t > 0$ er $y = 300$ en horisontal asymptote til S. Dette betyr at det aldri vil bli mer enn 300 smittede elever ved skolen.



Oppgave 2

a) Påstanden er sann fordi hvis $x > 0$ har vi at

$$e^{k \ln x} = (e^{\ln x})^k = x^k$$

b)

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 2)' = \lim_{x \to 2} 3x^2 = 8$$

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4)' = \lim_{x \to 2} 6x = 12$$

Skulle f vært deriverbar i $x = 2$ måtte dei to uttrykkene over hatt lik grenseverdi, og det har de ikke. Påstanden er feil.

c) Hvis en funksjon $f(x)$ er både minkende og voksende i en sammenhende definisjonsmengde, vil f anta lik verdi for minst to forskjellige verdier av x, og kan da ikke ha en omvendt funksjon. I så fall er påstanden er feil. Hvis f derimot har delt forskrift, minkende på en delmengde og voksende på en annen delmengde, er påstanden sann.

Oppgave 3

a) Vi definerer r_a og r_b som henholdsvis ra og rb i CAS. Verdien til avstanden mellom bilene er gitt i celle 3, og dette tilsvarer ca 2 km.

b) Da bil B har høyest banefart (celle 4 og 5) er det rimelig å anta at bil B kjører på motorvei.

c) I veikrysset har bilene like koordinater (celle 6 og 7). Av dette finner vi at bil B når krysset først (celle 8).

1	$\mathrm{ra(t)} := \left(\frac{1}{2}(t-4), t\right)$ $\rightarrow \mathbf{ra(t)} := \left(\frac{t-4}{2}, t\right)$
2	$\mathrm{rb(t)} := \left(\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{5}\right)\right)$ $\rightarrow \mathbf{rb(t)} := \left(\frac{t}{2}, \frac{15t-3}{10}\right)$
3	Avstand(ra(1), rb(1)) $\rightarrow \frac{\sqrt{101}}{5}$
4	$\lvert ra'(t) \rvert$ $\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5}$
5	$\lvert rb'(t) \rvert$ $\rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10}$
6	$x(ra(t)) = x(rb(s))$ $\rightarrow \frac{1}{2}t - 2 = \frac{1}{2}s$
7	$y(ra(t)) = y(rb(s))$ $\rightarrow t = \frac{3}{2}s - \frac{3}{10}$
8	{$6, $7} Løs: $\left\{\left\{s = \frac{43}{5}, t = \frac{63}{5}\right\}\right\}$

Oppgave 4

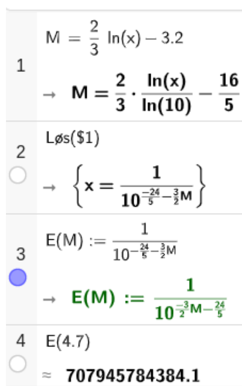
a) Utttrykket er gitt i celle 3.

b) Ved et jordskjelv som måler 4.7 på massemagnitudeskalaen blir det utløst ca 140 kJ (celle 4).

c)

$$\frac{E(M_0+1)}{E(M_0)} = 10^{\frac{3}{2}(M_0+1)+\frac{24}{5}} \cdot 10^{-\frac{3}{2}M_0-\frac{24}{5}} = 10^{\frac{3}{2}} \approx 31.6$$

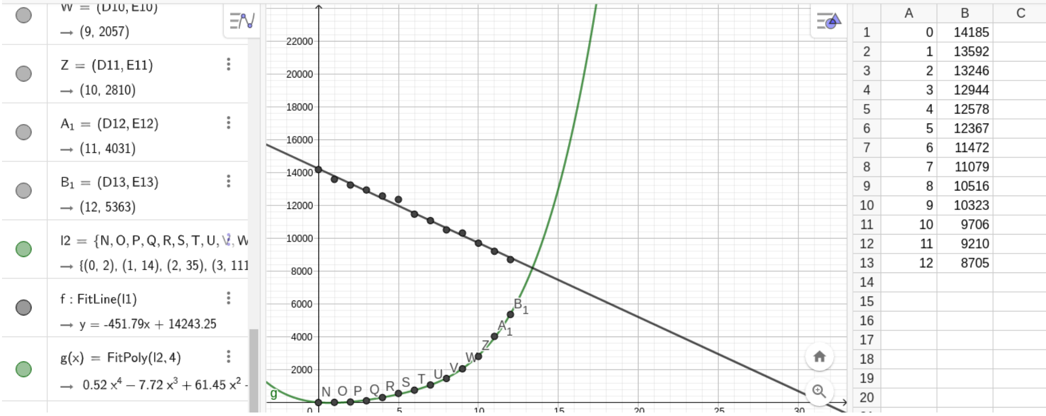
Hvis M øker med 1 utløser jordskjelvet ca 31.6 ganger så stor energi.



Oppgave 5

a) For å beskrive salg av bensinbiler har vi valgt å bruke lineær regresjon, da dette ser ut til å passe rimelig godt med tallene fra tabellen. For å beskrive salget av elbiler har vi valgt regresjon med et 4. gradspolynom da polynomfunksjoner viste seg å beskrive veksten de siste årene bedre enn en eksponentialfunksjon.

b) Hvis den lineære trenden for salg av bensinbiler fortsetter, vil det bli solgt ca. 450 bensinbiler mindre for hvert år som går. Dette ser vi ut av stigningstallet til f. f vil ikke være gyldig noen få år etter 2040, for da er f negativ. Hvis trenden for elbilsalg fortsetter, vil elbil-salget ha nådd ca. 20 000 rundt 2029. Dette ser vi av grafen til g. Da er det ikke lenger rimelig å anta at modellen er gyldig, fordi det totale elbilsalget i 2010 er var ca. 20 000.



Oppgave 6

a) Lars ønsker å finne det største arealet $\square ABCD$ kan ha. Ved å kjøre programmet får man at dette arealet er 24751.

b) Lars finner arealet til rektangelet ved funksjonen `areal(x)`. I tillegg finner han en tilnærming til den deriverte av denne funksjonen ved `der_areal(x)`. Han antar så at

- `areal(x)` er voksende i $x = 0$ (derivert større enn 0).
- `areal(x)` har et toppunkt for $x \in [0, 2]$. Dette fordi while-løkken stopper når den deriverte skifter fortegn.

Strategien vil ikke fungere uavhengig av hvilken funksjon f er fordi:

- Hvis `der_areal(x)` ≤ 0 for $x = 0$ vil while-løkken stoppe med en gang.
- Hvis hele verdimengden til f er negativ har `areal(x)` feil fortegn.

Oppgave 7

Da høyden er uavhengig av formen på G, må høyden som bidrar til størst volum være $h = r$. Vi finner G uttrykt ved x. Da $G = 0$ for $x \in \{0, r\}$ og $G \geq 0$ for $x \in [0, r]$, må G ha et toppunkt hvor $G'(x) = 0$ for $x \in [0, r]$. Da G har maksimalverdi $2r^2$, er det største volumet pyramiden kan ha gitt som

$$V = \frac{r \cdot 2r^2}{3} = \frac{2r^3}{3}$$