

Oppgave 1

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

b) Vi setter $u = 2x - 3$ og $v = e^x$. Da er $u' = 2$ og $v' = e^x$. Av divisjonsformelen ved derivasjon har vi at

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2e^x - (2x - 3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{5 - 2x}{e^x}$$

c) $g'(2) = \frac{5-2 \cdot 2}{e^2} = \frac{1}{e^2}$ og $g'(3) = \frac{5-2 \cdot 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3}$

d) Grafen går fra å være stigende til synkende. Dette betyr også at g har en lokalt toppunkt på intervallet.

Oppgave 2

a) Ved å sette $u = \lg x$, kan vi skrive

$$u^2 - 2u - 8 = 0$$

Av abc -formelen har vi at

$$\begin{aligned} u &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

Dermed er

$$u = 4 \quad \vee \quad u = -2$$

Antatt at $\lg$ har 10 som base er

$$x = 10^4 \quad \vee \quad x = 10^{-2}$$

b) Vi har at $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$. Dermed er $\frac{1}{64} = 4^{-3}$, og da er

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3$$

Oppgave 3

- a) Nevneren til uttrykket går mot 0 når x går mot -2 , mens telleren går mot 14. Dermed eksisterer ikke grenseverdien.
- b) 1) Grensen eksisterer hvis $x + 2$ er en faktor i telleren. For en $a = 2 + b$, skal vi da kunne skrive telleren som $x^2 + (2 + b)x + 2b$. Dette må bety at $b = 1$, og da er $a = 3$.
- 2) Da $2 \cdot (-4) = -8$ og $2 + (-4) = -2$, har vi at

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{-2 + 1}{-2 - 4} = \frac{1}{6}$$

Oppgave 4

- a) $\overrightarrow{AB} = [3 - (-2), 2 - 3] = [5, -1]$. Videre er

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

- b) Parameteriseringen av linja kan vi skrive som

$$\vec{r}(t) = (-2, 3) + t[5, -1]$$

Linja skjærer x -aksen når y -verdien til $\vec{r}$ er lik 0, som er når $t = 3$.
Dermed er

$$C = \vec{r}(3) = (-2 + 15, 0) = (13, 0)$$

- c) $\overrightarrow{BD} = [-1, t - 2]$. Hvis $\angle ABD = 90^\circ$, har vi at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\ [5, -1] \cdot [-1, t - 2] &= 0 \\ 5 \cdot (-1) + (-1)(t - 2) &= 0 \\ -5 - t + 2 &= 0 \\ t &= -3\end{aligned}$$

Dermed er $D = (2, -3)$.

Oppgave 5

- a) Vi setter $u = 4x^2$ og $\ln x = v$. Da er $u' = 8x$ og $v' = \frac{1}{x}$. Av derivasjonsregelen ved multiplikasjon har vi at

$$f'(x) = u'v + uv' = 8x \ln x + 4x^2 \cdot \frac{1}{x} = 4x(2 \ln x + 1)$$

f har toppunkt/bunnpunkt der hvor $f'(x) = 0$. $4x = 0$ når $x = 0$, men $\ln 0$ er ikke definert. Dette betyr at $f'(x) = 0$ bare når $2 \ln x = -1$, som betyr at $x = e^{-\frac{1}{2}}$. $4x$ er positiv på intervallet for alle $x > 0$, mens $2 \ln x + 1$ skifter fortegn fra negativ til positiv når $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Dette er altså et minimumspunkt for f . Vi har at

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 4 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = 4e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2e^{-1}$$

Altså er $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -2e^{-1}\right)$ et bunnpunkt på grafen til f .

b) Eleven prøver å finne nullpunktet til funksjonen.

Vi lar $x = x_1$ være løsningen av likningen $f(x) = 0$.

Linje 11: Starter med "å gjette" at x_1 er midtpunktet mellom a og b .

Linje 13: Itererer så lenge $f(m)$ er over 0,0001.

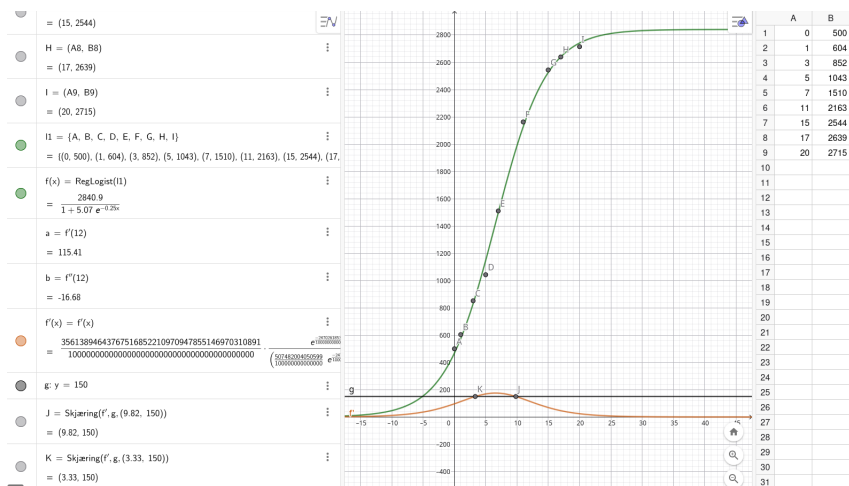
Linje 15-18: Setter $b = m$ hvis $f(a) \cdot f(m) < 0$, og $a = m$ hvis ikke. Hvis vilkåret er oppfylt, har $f(a)$ og $f(m)$ forskjellig fortegn, og siden $f(a) < 0$, vet vi at $x_1 \in [a, m]$. Da må ny høyre grense settes til m . Hvis vilkåret ikke er oppfylt er $x_1 \in [m, b]$. Da må ny venstre grense settes til m .

Linje 20: "Gjetter" at x er midtpunktet mellom nye a og b .

$f(x) = 0$ når $\ln x = 0$, altså når $x = 1$.

Oppgave 1

- a) Lager en liste med punkt, og bruker **RegLogist**. Får da funksjonen $f(x)$ som samsvarer med $F(t)$ i oppgaven. Vi ser at grafen ligger rimelig nærme punktene, som tyder på at modellen er gyldig på intervallet $[0, 20]$. Da er det rimelig å tro at modellen vil være gyldig også for noen år før 1960 og for noen år etter 1980. Men når t går fra 0 mot negative verdier, går F ganske fort mot 0. Dermed er nok ikke modellen gyldig for så mange år før 1960. Etter ca. $t = 30$ flater grafen til F ut. Mange små tettsteder i Norge har i nyere tid hatt liten befolkningsendring, og dermed er det ikke umulig at modellens gyldighetsområde strekker seg langt over $t = 20$.
- b) $f'(12) \approx 115$, som betyr at ved starten av 1972 økte antall innbyggere med ca. 115 personer per år. $f''(12) \approx -17$, som betyr at økningen i antall innbyggere var avtagende i starten av 1972.
- c) Vi definerer $f'(x)$ som en funksjon, og finner skjæringspunktene med linja $y = 150$. I ca. perioden 1963-1970 økte befolkningen med mer enn 150 personer per år.



Oppgave 2

a) Vi har at

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = -4$$

Dermed er ikke f kontinuerlig hvis $a = 2$ og $b = -2$.

b) Vi setter $g(x) = ax + b$ og $h(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x$. Krav at f skal være kontinuerlig og deriverbar gir lîningssettene

$$h'(k) = 0$$

$$h(k) = c$$

og

$$g(-2) = h(-2)$$

$$g'(-2) = h'(-2)$$

I CAS finner vi at $a = 15$ og $b = 24$. I tillegg er enten $c = 2$ og $k = -1$, eller så er $c = -\frac{10}{27}$ og $k = \frac{1}{3}$.

	$g(x) := a x + b$
1	→ $g(x) := a x + b$
2	$h(x) := 2 x^3 + 2 x^2 - 2 x$
	→ $h(x) := 2 x^3 + 2 x^2 - 2 x$
3	$h'(k) = 0$
	→ $6 k^2 + 4 k - 2 = 0$
4	$h(k) = c$
	→ $2 k^3 + 2 k^2 - 2 k = c$
5	{ \$3, \$4 }
	Løs: $\left\{ \{c = 2, k = -1\}, \left\{ c = -\frac{10}{27}, k = \frac{1}{3} \right\} \right\}$
6	$g(-2) = h(-2)$
	→ $-2 a + b = -4$
7	$g'(-2) = h'(-2)$
	→ $a = 14$
8	{ \$6, \$7 }
	Løs: $\{ \{a = 14, b = 24\} \}$

Oppgave 3

- a) Vi definerer funksjonen i CAS, og finner at $l(500) \approx 3,48$ og $l(1400) \approx 4,1$. Altså svinger verdiene mellom det som tilsier at lukt bør begrenses og at tiltak kreves. Dermed har beboerne grunn til å klage.
- b) For at lukt skal være akseptabel, må vi ha at $l = 2$ eller mindre. Da kan ikke C overstige ca. 44.

1	$l(C) := 1.4 \ln(C) - 0.3$
☒	$\rightarrow l(C) := \frac{7}{5} \cdot \frac{\ln(C)}{\ln(10)} - \frac{3}{10}$
2	$l(500)$
☐	$\approx \mathbf{3.48}$
3	$l(1400)$
☐	$\approx \mathbf{4.1}$
4	$l(x) = 2, x = 1$
☐	NLøs: $\{x = \mathbf{43.94}\}$

Oppgave 4

- a) $\overrightarrow{HU} = [1200, 100]$. Siden dette er en retningsvektor for l , er

$$l(s) = (0, 300) + s(1200, 100)$$

$$l(0) = H \text{ og } l(1) = U.$$

- b) Siden Ina går med konstant fart, har hun etter 5 min gått $\frac{5}{20}$ av turen, og dermed $\frac{5}{20}$ av lengden til $\overrightarrow{HU}$. Da har hun gått ca. 301 m (celle 4).
- c) I punktet hvor Jonas og Ina møtes er likningssettet fra celle 5 og cell 6 oppfylt. Ina møter Jonas når hun har gått $\frac{7}{20}$ av turen (celle 7), og da hun gått ca. 421 m (celle 8).

1	$H := (0, 300)$
☒	$\rightarrow H := (0, 300)$
2	$U := (1200, 400)$
☒	$\rightarrow U := (1200, 400)$
	Vektor(H, U)
3	$\rightarrow \begin{pmatrix} 1200 \\ 100 \end{pmatrix}$
4	$\frac{5}{20} S $
☐	≈ 301.04
	$1200 s = 520 - 20 t$
5	$\rightarrow 1200 s = -20 t + 520$
	$300 + 100 s = 310 + 5 t$
6	$\rightarrow 100 s + 300 = 5 t + 310$
	$\{ \$5, \$6 \}$
7	Løs: $\left\{ \left\{ s = \frac{7}{20}, t = 5 \right\} \right\}$
8	$\frac{7}{20} S $
☐	≈ 421.46

Oppgave 5

a) Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{p}^2 &= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 52\end{aligned}$$

Dermed er $|p| = \sqrt{52}$.

b) Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{q} &= 0 \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (t\vec{a} + \vec{b}) &= 0 \\ t\vec{a}^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 &= 0 \\ 16t + 12t + 12 + 12 &= 0 \\ t &= -\frac{6}{7}\end{aligned}$$

Oppgave 6

a) Vi skriver par med funksjoner først og andrederivert etter.

A og G. Siden $(a^x)' = a^x \ln x$, ligger grafen i G litt over grafen i A.

E og H. Av symmetrien viser grafen i E en andregradsfunksjon. Da er den dobbeltderiverte en konstant. (E kunne også vært andred-derivert for D)

B og C. Grafen i B går mot $\pm\infty$, og har et infleksjonspunkt. Da er dette en tredjegradsfunksjon, med en rett linje som dobbelt-derivert.

F og D. Av symmetrien viser D en andregradsfunksjon. Da er den tilhørende funksjonen en fjerdegradsfunksjon. Ved å skrive x^4 i Geogebra ser vi at dette stemmer godt overens med F.

b) A, B, C og G. Dette fordi de er injektive.