Løsningsforslag TM1

Kapittel 1 2

Kapittel 2 3

Kapittel 3 8

Kapittel 4 14

Kapittel 5 15

Kapittel 6 16

Kapittel 7 17

Kapittel 1

Kapittel 2

2.2.2

a) Vi har at

$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x(2x-4) = 0$$

Altså er $x = 0$, eller

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

2.2.5

La x_b være minimumspunktet til f. Av symmetriegenskapene til f har vi at $x_b = \frac{x_1+x_2}{2}$ hvis $f(x_1) = f(x_2)$. Da $(-2)4 = -8$ og $4 - 2 = 2$, er

$$f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$$

Dette betyr at $f(2) = f(-4) = 0$, og da er

$$x_b = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

Gruble ??
Da
$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x^2 + 2\sqrt{xy} + y^2 = 27$$
må $\sqrt{xy}$ også være et heltall, og dermed må xy være et kvadrattall. Ved litt prøving og feiling finner vi at
$$x = 3 \qquad , \qquad y = 12$$

Gruble 3

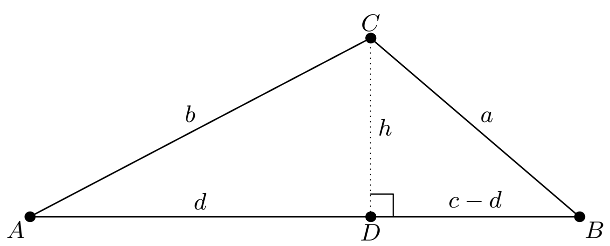
a)
$$\begin{aligned}10-2\sqrt{21} &= 10-2\sqrt{7}\sqrt{3}\\ &= \sqrt{7}^2+\sqrt{3}^2-2\sqrt{7}\sqrt{3}\\ &= (\sqrt{7}-\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}13+2\sqrt{22} &= 13+2\sqrt{11}\sqrt{2}\\ &= \sqrt{11}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{11}\sqrt{2}\\ &= (\sqrt{11}+\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}8+4\sqrt{3} &= 2(4+2\sqrt{3})\\ &= 2(\sqrt{3}^2+\sqrt{1}^2+2\sqrt{1}\sqrt{3})\\ &= 2(\sqrt{3}+1)^2\\ &= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}42-14\sqrt{5} &= 7(6-2\sqrt{5})\\ &= 7(\sqrt{5}^2+\sqrt{1}^2-\sqrt{5}\sqrt{1})\\ &= 7(\sqrt{5}-\sqrt{1})^2\\ &= (\sqrt{35}-\sqrt{7})^2\end{aligned}$$

Gruble 4



Vi setter $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = CD$ og $d = AD$. Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ADC$ og $\triangle DCB$ har vi at

$$
\begin{aligned}
b^2 - d^2 &= a^2 - (c-d)^2 \\
d &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}
\end{aligned}
$$

Videre er

$$
\begin{aligned}
h^2 &= b^2 - d^2 \\
&= (b+d)(b-d) \\
&= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \\
&= \frac{1}{4c^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] \\
&= \frac{1}{4c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)
\end{aligned}
$$

Da $h > 0$, er

$$
h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}
$$

Arealet T til $\triangle ABC$ er nå gitt som

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}hc \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}
\end{aligned}
$$

Merk: Da en trekant må ha et areal med positiv verdi, kan Herons formel brukes for å vise *trekantulikheten*, som vi utledet i MB.

Gruble 5
Alternativ 1
Skal grafen til f være symmetrisk om linja $x = -\frac{b}{2a}$, må vi for et tall k ha at

$$f\left(k - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-k - \frac{b}{2a}\right) \tag{1}$$

For et tall d har vi at

$$d - \frac{b}{2a} = \frac{2ad - b}{2a}$$

Videre er

$$\begin{aligned} f\left(d - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(\frac{2ad - b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2ad - b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - 4abd + b^2}{4a} + \frac{2abd - b^2}{2a} + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Dette betyr at uansett om $d = k$ eller om $d = -k$, så vil uttrykket over være likt, og altså er (1) gyldig.

Alternativ 2
Skal f være symmetrisk om en vertikallinje, må det bety at to tall t og s gir lik f-verdi:

$$\begin{aligned} f(s) &= f(t) \\ as^2 + bs + c &= at^2 + bt + c \\ a(s^2 - t^2) + b(s - t) &= 0 \\ a(s - t)(s + t) + b(s - t) &= 0 && (s \neq t) \\ a(s + t) + b &= 0 \\ t &= -\frac{b}{a} - s \end{aligned}$$

Vi lar x_s være x-verdien til symmetrilinja til f. x_s må ligge midt mellom s og t. Vi lar $t > s$, da er

$$\begin{aligned} x_s &= s + \frac{1}{2}(t - s) \\ &= s + \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} - s - s\right) \\ &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Gruble ??

$$\begin{aligned}
d^2r^2 - (d+r)^2r^2 + 4bd^2(b-r)& \\
&= (-2dr - r^2)r^2 + 2bd(2bd - 2dr) \\
&= (2bd - 2dr - r^2)r^2 - 2bdr^2 + 2bd(2bd - 2dr - r^2) + 2bdr^2 \\
&= (2bd - 2dr - r^2)\left(r^2 + 2bd\right)
\end{aligned}$$

Gruble 7
Hvis $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, har vi for et tall k at

$$f\left(\pm k - \frac{b}{2a}\right) = \frac{4a^2k^2 - b^2}{4a} + c = 0$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på k, får vi at

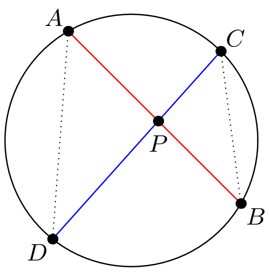
$$k = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dette betyr at

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}\right) = 0$$

Kapittel 3

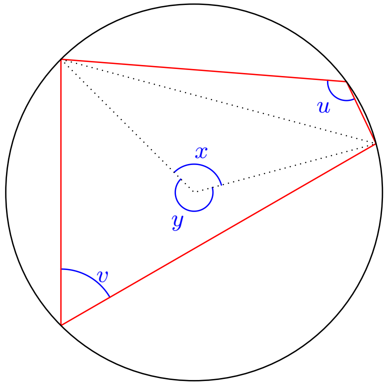
Gruble 18



Av regel 3.7 har vi at $\angle CBA = \angle CDA$. Da $\angle CPA = \angle DPB$ (de er toppvinkler), er dermed $\triangle PDA \sim \triangle PBC$. Altså har vi at

$$DP \cdot PC = AP \cdot PB$$

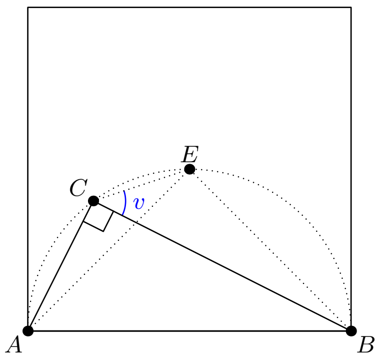
Gruble 17



Vi har at $y = 360 - x$. Da x og y er de tilhørende sentralvinklene til henholdsvis v og u, er

$$2u = 360^\circ - 2v$$
$$y = 180^\circ - v$$

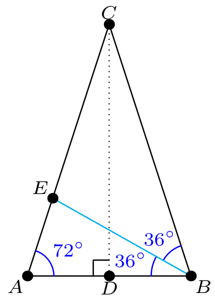
Gruble ??



$\triangle ABE$ er rettvinklet og likebeint. Periferivinklene $\angle BCE$ og $\angle BAE$ spenner over samme bue, og dermed er

$$v = \angle BAE = 45^\circ$$

Gruble 13



Da $\angle BAC = \angle CBA = 72^\circ$, er $\triangle ABC$ likebeint ($AC = BC$) og $\angle ACB = 36^\circ$. Altså er også $\triangle BEC$ likebeint ($EB = EC$). $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ fordi de har $\angle BAC$ felles, og $\angle ACB = \angle EBD$. Vi setter $x = AB$ og $y = BC$, og får at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EA}{AB}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{y-x}{y}$$
$$xy + x^2 - y^2 = 0$$

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-y + \pm\sqrt{y^2 - 4y^2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} y \end{aligned}$$

Vi forkaster den negative løsningen for x, og får at

$$BD = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}y$$

Da $\sin 18^\circ = \frac{BD}{BC}$, er

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

3.2.3

a) Vi har at

$$AF = AD = c - r$$

$$FC = CE = a - r$$

Da $AF + FC = c$, er

$$\begin{aligned} c - r + a - r &= b \\ c + a - b &= 2r \end{aligned}$$

b) Med c som grunnlinje har $\triangle ABC$ høgde b. Av den klassiske arealformelen for en trekant (se MB) og formelen fra Oppgave 3.2.2 har vi da at

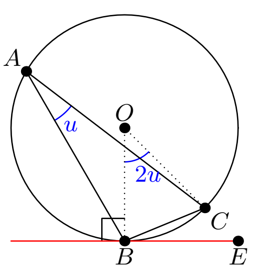
$$\begin{aligned} (a+b+c)r &= ac \\ r &= \frac{ac}{a+b+c} \end{aligned}$$

c) Av oppgave (a) og (b) er

$$\begin{aligned} c + a - b &= \frac{2ac}{a+b+c} \\ (c+a-b)(a+b+c) &= 2ac \\ (a+c)^2 - b^2 &= 2ac \\ a^2 + c^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Formelen kjenner vi igjen som Pytagoras' setning.

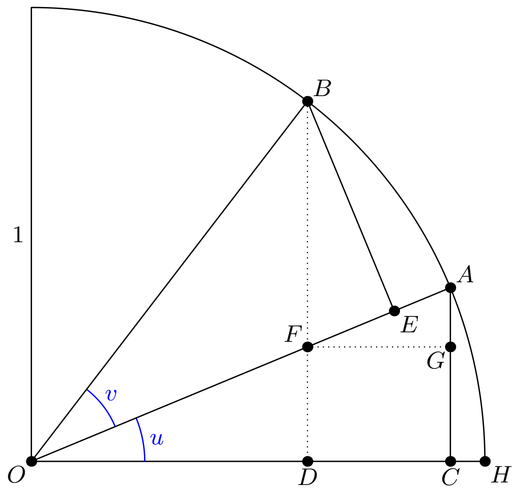
??



Vi setter $v = \angle BAC$. Da $\angle BAC$ er en periferivinkel, er $\angle BOC = 2v$. $\triangle BCO$ er likebeint, og derfor er $\angle CBO = 90^\circ - u$ (forklar for deg selv hvorfor). Nå har vi at

$$\angle EBC = 90^\circ - \angle CBO = u$$

Gruble 15



I figuren over merker vi oss at

$$EB = \sin v \qquad AC = \sin u$$

$$OE = \cos v \qquad OC = \cos u$$

Da $\triangle OCA \sim \triangle BEF$, har vi at

$$FE = \frac{BE}{OC} AC = \frac{\sin v}{\cos u} \sin u$$

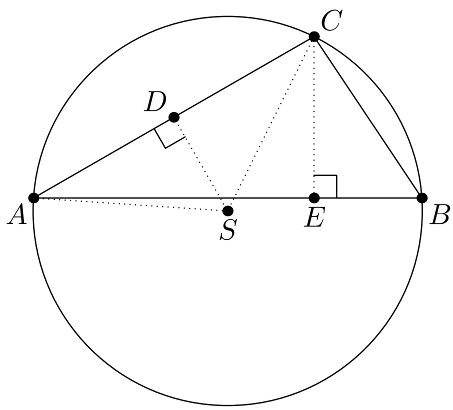
Videre har vi at $EA = OA - OE = 1 - \cos v$. Tilsvarende er $CH = 1 - \cos u$. I tillegg er

$$DC = FG = (FE + EA) \cos u = \left(\frac{\sin v}{\cos u} \sin u + 1 - \cos v \right) \cos u$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} OD &= OH - CH - DC \\ \cos(u + v) &= 1 - (1 - \cos u) - \left(\frac{\sin v}{\cos u} \sin u + 1 - \cos v \right) \cos u \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \end{aligned}$$

Gruble 20



Av regel 3.7 er $\angle CSA = 2\angle CBA$. Da $\triangle ASC$ er likesidet, er derfor $\angle DSA = \angle CBA$. Følgelig er $\triangle ASD \sim \triangle CBE$. Dette betyr at

$$\frac{a}{EC} = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$$
$$r = \frac{ab}{2EC}$$

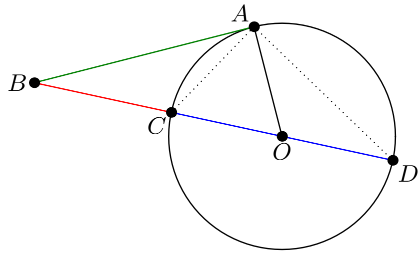
Da $2A_{\triangle ABC} = EC \cdot c$, er $EC = \frac{2A_{\triangle ABC}}{c}$, og dermed er

$$r = \frac{abc}{4A_{\triangle ABC}}$$

Gruble ??
Gitt $\triangle ABC$, hvor $\angle C = 90°$, $a = BC$, $b = AC$, og $c = AB$. Da er $4A_{\triangle ABC} = 2ab$. Av gruble 20 er da $r = \frac{c}{2}$. Altså er $c = 2r$, og er dermed en diameter i den omskrevne sirkelen.

Gruble 22
Vi setter $\angle ADC = u$. Av regel 3.7 er $\angle AOC = 2\angle ADC$. Da $\triangle AOC$ er likebeint ($AO = CO$), er dermed $\angle OAC = 90 - u$, og følgelig er $\angle BAC = u$. Dette betyr at $\triangle ABC$ og $\triangle BDA$ har to vinkler som er parvis like store, og dermed er de formlike. Altså er

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$
$$AB^2 = BC \cdot BD$$


A
B
C
O
D

Kapittel 4

4.1.8 Gitt to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$. Da $\cos 0^\circ = 1$, har vi av (4.17) at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$$
$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$
$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Kapittel 5

Kapittel 6

Gruble 30

a) Av (6.3) har vi at

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

For at denne grensen skal eksistere, må vi ha at $\lim_{b \to a} (f(b) - f(a)) = 0$ (hvis ikke går grensen mot $\pm\infty$, og da er ikke den deriverte definert), og følgelig er $\lim_{a \to b} f(b) = f(a)$. Dermed er f kontinuerlig for alle x.

b) Gitt funksjonen $f(x) = 0$, da er $f'(x) = 0$ for alle x. Av resultatet fra a) er dermed $f(x) = 0$ kontinuerlig.

Gitt funksjonen $g(x) = a$, hvor a er en konstant. Da er $f'(x) = 0$, og dermed er $g(x)$ kontinuerlig.

Gitt funksjonene $h(x) = ax + b$ hvor a og b er konstanter. Da er $h'(x) = g(x)$, og dermed er $h(x)$ kontinuerlig.

Med samme resonnement kan vi stegvis øke graden av polynomet så høyt vi måtte ønske det, og dermed er alle polynomfunksjoner kontinuerlige.

Gruble 31

Vi har at

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[f'(x) + f'(x-h) \right] \\
&= 2f'(x)
\end{aligned}$$

Kapittel 7