Løsningsforslag MB

Kapittel 1

Kapittel 2

Kapittel 3

Kapittel 4

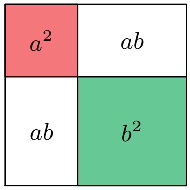
Kapittel 5

Kapittel 6

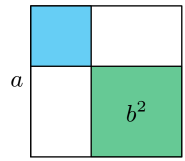
Kapittel 7

Kapittel 8

Gruble 17



(a)



(b)

a) Da det røde kvadratet har sidelengde a og det grønne kvadratet har sidelengde b, har det største kvadratet sidelengde $a+b$. Hver av de hvite rektanglene har areal ab. Dermed har vi at

$$
\begin{aligned}
A_{\text{størst kvadrat}} &= A_{\text{rødt kvadrat}} + A_{\text{grønt kvadrat}} + 2A_{\text{hvitt rektangel}} \\
(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab
\end{aligned}
$$

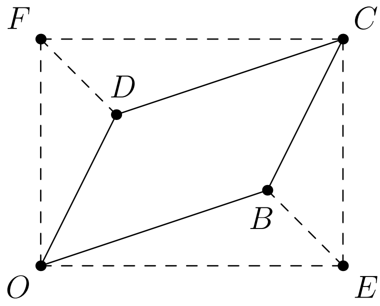
b) Det blå kvadratet har sidelengde $a-b$. Hver av de hvite rektanglene har areal $(a-b)b$. Dermed har vi at

$$
\begin{aligned}
A_{\text{størst kvadrat}} &= A_{\text{blått kvadrat}} + A_{\text{grønt kvadrat}} + 2A_{\text{hvitt rektangel}} \\
a^2 &= (a-b)^2 + b^2 + 2(a-b)b \\
a^2 &= (a-b)^2 + b^2 + 2ab - 2b^2 \\
a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= A_{\text{størst kvadrat}} - A_{\text{grønt kvadrat}} \\
&= A_{\text{blått kvadrat}} + 2A_{\text{hvitt rektangel}} \\
&= (a-b)^2 + 2(a-b)b \\
&= (a-b)(a-b+2b) \\
&= (a-b)(a+b)
\end{aligned}
$$

Gruble 18



Vi lar

$$E = (a + c, 0) \qquad\qquad F = (0, b + d)$$

Med OE som grunnlinje har $\triangle OEB$ høyde b, altså er

$$2A_{\triangle OEB} = (a + c)b$$

Tilsvarende er

$$2A_{\triangle FDO} = (b + d)c$$

Da $A_{\triangle OEB} = A_{\triangle CDF}$ og $A_{\triangle FDO} = A_{\triangle EBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} A_{\square ABCD} &= A_{\square OECF} - 2A_{\triangle OBE} - 2A_{\triangle FDO} \\ &= (a + c)(b + d) - (a + c)b - (b + d)c \\ &= (a + c)d - (b + d)c \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Gruble 23
Vi har at

$$a = \frac{cb}{d}$$

Dermed er

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{\frac{cb}{d} - c}{b - d} = \frac{c(b - d)}{d(b - d)} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Gruble 24
Gitt et tall $n = abc$, hvor a, b og c er sifrene til tallet Da har vi at

$$\begin{aligned} n &= 100a + 10b + c \\ &= 99a + 99b + a + b + c \end{aligned}$$

Leddene med 99 som faktor er delelige med 3, og dermed er n delelig med 3 hvis $a + b + c$ er delelig med 3.

Kapittel 9

Kapittel 10

??

a) Av (I) har vi at

$$x - y = 5$$
$$y = x - 5$$

Av (II) har vi at

$$x + y = 9$$
$$y = 9 - x$$

De to uttrykkene for y er uttrykket for to rette linjer, som henholdsvis sammenfaller med uttrykkene for $f(x)$ og $g(x)$.

b) Når $f(x) = g(x)$, har vi at

$$x - 5 = 9 - x$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Videre er da $y = 9 - 7 = 2$. Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

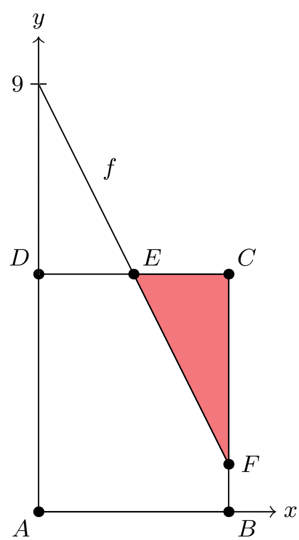
Gruble 36

For skjæringspunktet til f og CD har vi at

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5 \\
-2x + 9 &= 5 \\
-2x &= -4 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Altså er $E = (2, 5)$ den éne skjæringspunktet. For skjæringspunktet til f og BC har vi at $x = 4$. Da er $f(4) = -2 \cdot 4 + 9 = 1$. Altså er $F = (4{,}1)$ det andre skjæringspunktet. $EC = 2$ og $FC = 4$. Dermed er

$$A_{\triangle EFC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$



Gruble 39

a) Ved å gange ut parentesene får vi at

$$(x + 2)(x - 4) = x^2 - 4x + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x - 8$$

Dette tilsvarer funksjonsuttrykket til f.

b) Av uttrykket fra a), finner vi at $f = 0$ når $x = -2$ og $x = 4$.

c) Vi har at

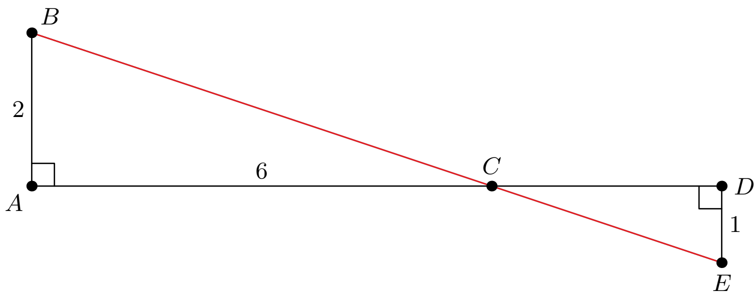
$$
\begin{aligned}
f(-3) &= (-3 + 2)(-3 - 4) = (-1) \cdot (-7) = 7 \\
f(5) &= (5 + 2)(5 - 4) = 7 \cdot 1 = 7
\end{aligned}
$$

Altså er $A = (-3, 7)$ og $B = (5, 7)$. For både A og B er horisontalavstanden til bunnpunktet 4.

d) To punkt med lik horisontalavstand til bunnpunktet vil ha samme y-verdi.

Kapittel 11

Gruble 47
Alternativ 1



Av Pytagoras' setning på $\triangle ACB$ har vi at

$$BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$\triangle ACB \sim \triangle DCE$ fordi begge er rettvinklede og $\angle BCA = \angle ECD$ (de er toppvinkler). Dermed har vi at

$$\frac{CE}{DE} = \frac{BC}{AB}$$

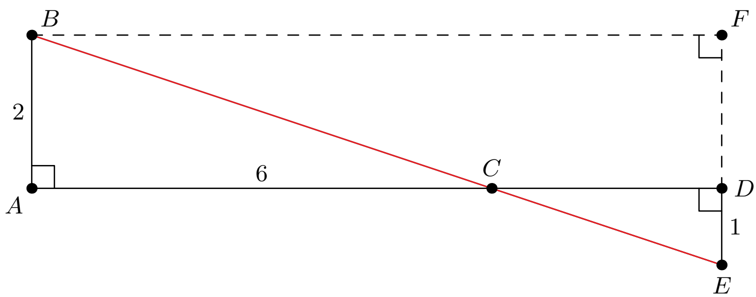
$$\frac{CE}{1} = \frac{2\sqrt{10}}{2}$$

$$CE = \sqrt{10}$$

Altså er

$$BE = BC + CE = 2\sqrt{10} + \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

Alternativ 2



$\triangle ACB \sim \triangle DCE$ fordi begge er rettvinklede og $\angle BCA = \angle ECD$ (de er toppvinkler). Dermed har vi at

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AB}$$

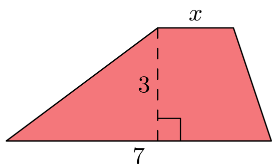
$$\frac{CD}{1} = \frac{6}{2}$$

$$CD = 3$$

Av Pytagoras' setning på $\triangle FBE$ har vi at

$$BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{(6+3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

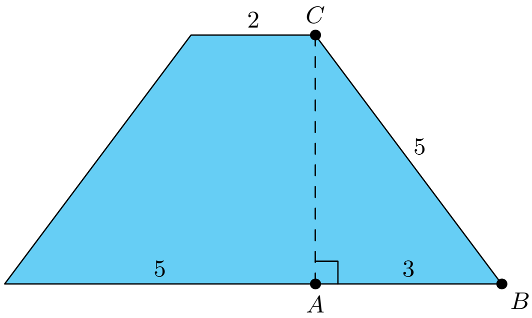
Gruble 42



Vi har at

$$
\begin{aligned}
\frac{7+x}{2} \cdot 3 &= 15 \\
(7+x) \cdot 3 &= 30 \\
7+x &= 10 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Gruble 43



Av Pytagoras' setning på $\triangle ABC$ har vi at

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= BC^2 - AC^2 \\
AC^2 &= 5^2 - 3^2 \\
AC &= \sqrt{16} \\
AC &= 4
\end{aligned}
$$

Dermed er arealet til trapeset

$$\frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$$

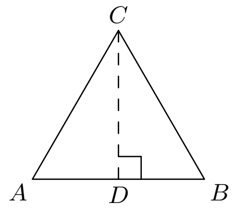
Gruble 44
Vi setter den ukjente siden lik a. Da må vi enten ha at

$$a = \sqrt{9^2 + 12^2} = 3\sqrt{9 + 16} = 3 \cdot 5 = 15$$

eller at

$$a = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{16 - 9} = 3\sqrt{7}$$

Gruble 45



a) Da $\triangle ABC$ er likesidet, er D midpunktet på AB. Dermed er

$$AD = DB = \frac{AB}{2} = \frac{s}{2}$$

$\triangle ACD$ er en trekant med vinkler lik 30°, 60° og 90° og $AC = 2AD$. Altså er den lengste siden dobbelt så lang som den korteste.

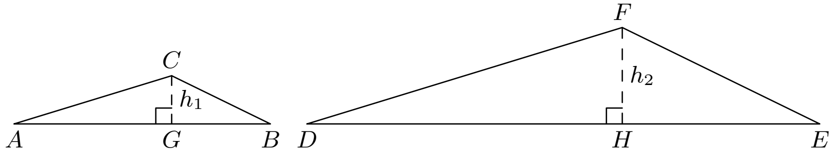
b) Av Pytagoras' setningpå $\triangle ADC$ har vi at

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 - AD^2 \\ &= s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}s^2 \end{aligned}$$

Altså er

$$CD = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Gruble 51



$\triangle AGB \sim \triangle DHF$ fordi de har parvis parallelle sider. Følgelig er

$$\frac{DE}{AB} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$DE = a \cdot AB$$

Nå har vi at

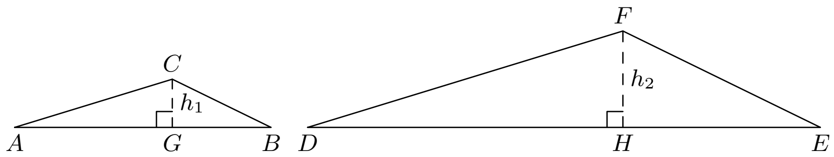
$$2A_{\triangle ABC} = AB \cdot h_1$$

$$2A_{\triangle DEF} = DE \cdot h_2 = a \cdot AB \cdot ah_1 = a^2 AB \cdot h_1$$

Dermed er

$$\frac{A_{\triangle DEF}}{A_{\triangle ABC}} = a^2$$

Gruble 52



$\dfrac{h_1}{a_1} = \dfrac{h_2}{a_2}$ kan vi omskrive til

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

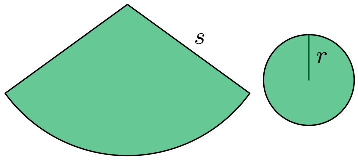
$\triangle AGB \sim \triangle DHF$ fordi de har parvis parallelle sider. Følgelig er

$$\frac{BG}{HF} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{AC}{DF}$$

Da $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, har vi at

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$$

Gruble 55



a) Av Pytagoras' setning er

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

b) Arealet A_c til sirkelen er $A_c = \pi r^2$. Buelengden til sektoren må være $2\pi r$, og dermed har vi av regel **??** at arealet A_s til sektoren er

$$A_s = \frac{1}{2} s \cdot 2\pi r = \pi r s$$

Altså har vi at

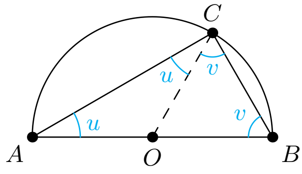
$$A_O = A_c + A_s = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$$

Gruble 56 Den største sidelengden multiplisert med 3 må utgjøre mer enn omkretsen til trekanten. Da $3 \cdot 8 = 24$, er dermed siden med lengde 8 en katet. Vi setter den andre kateten lik a og hypotenusen lik c. Da har vi at

$$\begin{aligned} a + 8 + \sqrt{a^2 + 8^2} &= 40 \\ \sqrt{a^2 + 64} &= 32 - a \\ a^2 + 64 &= (32 - a)^2 \\ a^2 + 2 \cdot 32 &= 32^2 - 2 \cdot 32a + a^2 \\ 32 - 2 &= 2a \\ 15 &= a \end{aligned}$$

Dermed er $c = \sqrt{15^2 + 64} = \sqrt{189} = 17$. Sidelengdene er 8, 15, og 17.

Gruble 50



$\triangle AOC$ og $\triangle BOC$ er likebeint $(OA = OC = OB)$. Dette betyr at

$$\angle COA = 180^\circ - 2u \qquad , \qquad \angle BOC = 180^\circ - 2v$$

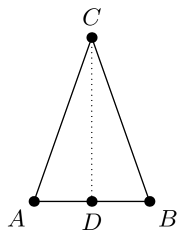
Dermed har vi at

$$\angle COA + \angle BOC = 180^\circ \tag{1}$$

$$180^\circ - 2u + 180^\circ - 2v = 180^\circ \tag{2}$$
$$2(u+v) = 180^\circ \tag{3}$$
$$u + v = 90^\circ \tag{4}$$

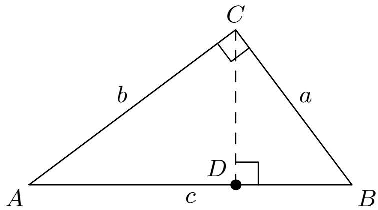
Altså er $\angle ACB = u + v = 90^\circ$.

Gruble 64



Vi lar D være punktet der halveringslinja til $\angle ACB$ skjærer AB. $\triangle DAC \cong \triangle DBC$ fordi de har CD felles og $AC = BC$ (trekantene oppfyller altså vilkår iii for formlikhet, og må da være kongruente). Følgelig er $\angle BDA = \angle ADC$, og da er $2\angle DBA = 180^\circ$. Altså er $\angle DBA = 90^\circ$, og da $AD = BD$, ligger DC på midtnormalen til AB.

Gruble 58



a) $\triangle CDA \sim \triangle BCA$ fordi begge er rettvinklede og de har $\angle BAC$ felles. Dermed er

$$AD = \frac{AC}{AB}AC = \frac{b^2}{c}$$

b) $\triangle BDA \sim \triangle BCA$ fordi begge er rettvinklede og de har $\angle CBA$ felles. Dermed er

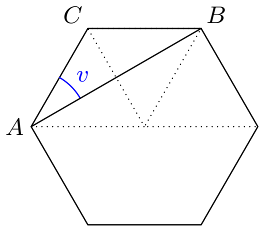
$$DB = \frac{BC}{AB}BC = \frac{a^2}{c}$$

c) Vi har at

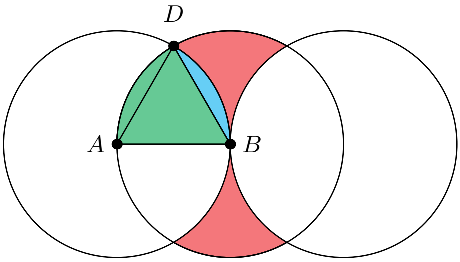
$$\begin{aligned} c &= AD + DB \\ c &= \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} \\ c^2 &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

Gruble ??
En regulær sekskant kan deles in i seks kongruente, likesidete trekanter. Dette betyr at $\angle C = 120°$. Da $\triangle ABC$ er likebeint, er derfor

$$\begin{aligned} 2\angle BAC + 120° &= 180° \\ \angle BAC &= 30 \end{aligned}$$



Gruble ??



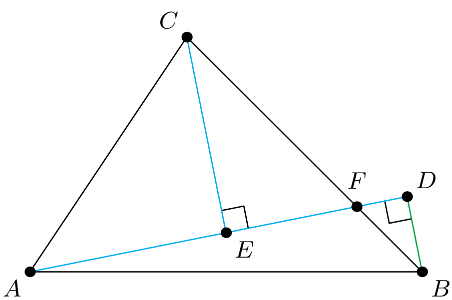
$\triangle ABD$ er likesidet fordi $AD = AB = BD$, og har dermed areal lik $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB^2 = \sqrt{3}$. Da $\angle B = 60^\circ$, utgjør den grønne sektoren $\frac{1}{6}$ av sirklenes areal, følgelig er arealet til den grønne sektoren $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$. Vi har at

$$\begin{aligned}\text{areal til grønt og blått område} &= 2 \cdot \text{areal til grønt område} - A_{\triangle ABD} \\ &= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}\text{areal til rødt omrdåde} &= \text{areal til sirkel} - 4 \cdot \text{areal til grønt og blått område} \\ &= 4\pi - 4\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Gruble ??



$\triangle EFC \sim \triangle DFB$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle CFE = \angle BFD$ (de er toppvinkler). Dermed har vi at

$$\frac{EF}{CE} = \frac{FD}{BD} \tag{5}$$

Videre er

$$EF + FD = AD - AE \tag{6}$$

Ved å løse likningssettet vi får av (5) og (6), med hensyn på EF og ED, får vi at

$$EF = \frac{AD - AE}{CE + BD} CE \qquad , \qquad FD = \frac{AD - AE}{CE + BD} BD$$

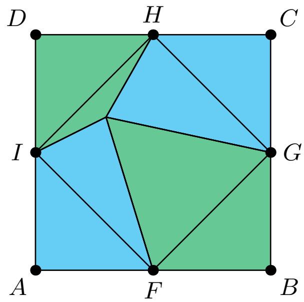
Det doble arealet til $\triangle ABC$ er gitt som

$$
\begin{aligned}
(AE + EF)CE + (AD - FD)BD & \\
&= \left(AE + \frac{AD - AE}{CE + BD} CE\right) CE + \left(AD - \frac{AD - AE}{CE + BD} BC\right) BD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{CE + BD} \left[\left(AE \cdot BD + AD \cdot CE\right) CE + \left(AD \cdot CE + AE \cdot BD\right) BD \right] \\
&= AD \cdot CE + AE \cdot BD
\end{aligned}
$$

Gruble 67
Alternativ 1 (sendt inn av Erika (15 år))

Da I, F, G og H er midpunkt, er $\square HIFG$ et kvadrat. De grønne trekantene i $\square HIFG$ har grunnlinje med lik lengde, og høyder som til sammen utgjør en sidelengde i $\square HIFG$. Dermed utgjør de halve området til $\square HIFG$, og da må de blå trekantene utgjøre den andre halvparten. Utenfor $\square HIFG$ har vi nå fire kongruente trekanter, hvor to er blå og to er grønne. Dermed er det blå området like stort som det grønne området både innenfor og utenfor $\square HIFG$, og dermed er hele det blå området like stort som hele det grønne området.

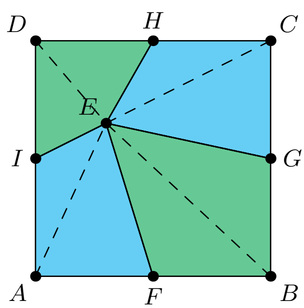


Alternativ 2
Av å legge merke til trekanter med grunnlinje og høgde av lik lengde, finner vi at

$$A_{\triangle AFE} = A_{\triangle FBE} \qquad A_{\triangle AIE} = A_{\triangle EDI}$$

$$A_{\triangle BGE} = A_{\triangle GCE} \qquad A_{\triangle HDE} = A_{\triangle HCE}$$

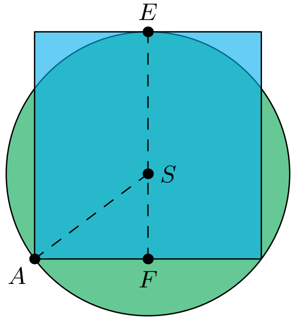
De åtte trekantene i likningene over utgjør hele $\square ABCD$ uten å overlappe hverandre, og hver likhet inneholder én blå og én grønn trekant. Dermed må arealet til det blå området tilsvare arealet til det grønne området.



Gruble 66
Vi lar r være radien til sirkelen. Vi har at $AS = ES = r$, $AF = 2$, og at $FS = EF - SE = 4 - r$. Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle AFS$ er

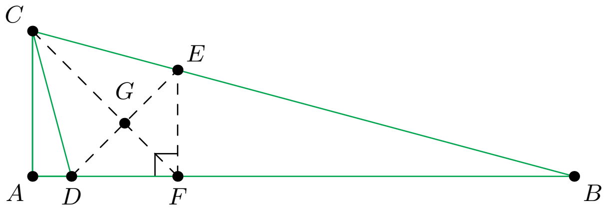
$$AS^2 = AF^2 + SF^2$$

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 2^2 + (4-r)^2 \\
r^2 &= 4 + 16 - 8r + r^2 \\
8r &= 20 \\
r &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$



Gruble ??

a) **Alternativ 1**



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$. Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, og da er $\angle FDE = 45^\circ$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Altså er

$$CF = CG + GF = \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}$$

Vi uttrykker det doble arealet til $\triangle DFC$ på to måter:

$$\begin{aligned} DF \cdot CA &= GD \cdot CF \\ \frac{s}{\sqrt{2}}b &= \frac{s}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{s}{2}\right) && (s \neq 0) \\ 4b &= s(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \\ s &= \frac{4b}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \end{aligned}$$

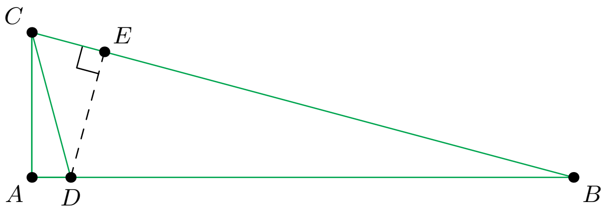
Da $\triangle ABC \sim \triangle BFE$, er

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{BE}{EF} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a - s}{\frac{s}{\sqrt{2}}} \\ sa - a\sqrt{2} &= -bs\sqrt{2} \\ \frac{a}{b} &= s\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - s} \end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{a}{b} = \frac{4b}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}b - \frac{4b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alternativ 2



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$, og dermed er $\triangle CDE$ en 30°, 60°, 90° trekant. Vi setter $s = CE$ og $c = AB$. Da er $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ og $CE = \frac{s}{2}$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle EBD$ fordi alle er rettvinklede og har en vinkel lik 15°. Dermed er

$$CD \cdot AB = BC \cdot AC$$
$$cs = ab$$

Videre har vi at

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DE}$$
$$\frac{c}{b} = \frac{a - \frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}s}$$
$$c = \frac{2ab - s}{\sqrt{3}s}$$
$$\sqrt{3}c = 2c - b$$

Altså er

$$c = \frac{b}{2 - \sqrt{3}} = b(2 + \sqrt{3})$$

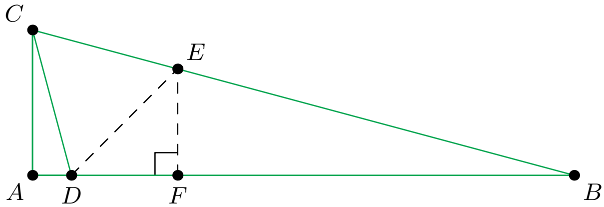
Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ er

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2(2 + \sqrt{3})^2 + b^2$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 8 + 4\sqrt{3}$$

Da $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$, er

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alternativ 3



Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle ABC$ har vi at $\angle ACB = 90 - 15^\circ = 75^\circ$. Vi lar D være punktet på AB slik at $\angle ACD = 15^\circ$. Da er $\angle CDA = 75^\circ$ og $\angle DCE = 60^\circ$. Videre lar vi E være punktet på BC slik at $CD = CE$, da er $\triangle CDE$ likesidet. Vi setter $s = CD$, og $c = AB$. $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ fordi begge er rettvinklede, og $\angle ACD = \angle ABC$. Dermed er

$$AD = AC\frac{AC}{AB} = \frac{b^2}{c}$$

$$s = BC\frac{AC}{AB} = \frac{ab}{c}$$

Med hensyn på vinkelsummen i $\triangle CBD$ er $\angle BDC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, og da er $\angle FDE = 45^\circ$. Altså er $\triangle DFE$ rettvinklet og likebeint, som betyr at $DF = FE = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Da $\triangle ABC \sim FBE$, er $\triangle ACD \sim \triangle FBE$, og dermed er

$$\begin{aligned} EF \cdot CD &= AD \cdot EB \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 &= \frac{b^2}{c}\left(a - \frac{ab}{c}\right) && (a,b \neq 0) \\ a &= c\sqrt{2} - b\sqrt{2} \end{aligned}$$

Av Pytagoras' setning med hensyn på $\triangle ABC$ har vi at $c^2 = a^2 - b^2$, og følgelig er

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} - b\sqrt{2} \\ a + b\sqrt{2} &= \sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2} \\ a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 &= 2(a^2 - b^2) \\ -a^2 + 2ab\sqrt{2} + 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

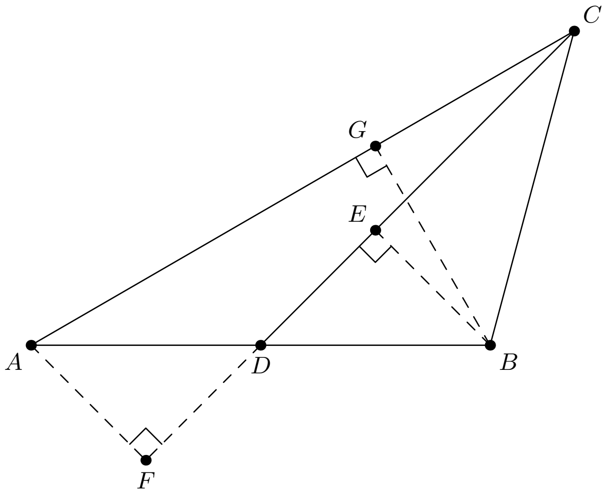
Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2b\sqrt{2} \pm \sqrt{8b^2 + 16b^2}}{-2} \\ &= \left(\sqrt{2} \mp \sqrt{6}\right) b \end{aligned}$$

Vi forkaster den negative løsningen for a, og får at

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

b)



$A_{\triangle DBC} = A_{\triangle ADC}$ fordi med henholdsvis DB og AD som grunnlinje har de lik høgde, og $DB = AD$. Altså er $AF \cdot DC = EB \cdot DC$, og da er $AF = EB$. Videre er $\triangle DAF \cong \triangle DBE$ fordi begge er rettvinklede $\angle ADF = \angle BDE$ (de er toppvinkler), og $AD = DB$. Vi setter $x = DE$, $a = EB$ og $b = AC$. Da $\triangle BCE$ er en 30°, 60°, 90° trekant, er $EC = \sqrt{3}a$ og $BC = 2a$. Da $\triangle BGC$ er en 45°, 45° , 90° trekant, er $GB = \frac{2}{\sqrt{2}}a$. Da $A_{\triangle ABC} = 2A_{\triangle DBC}$, har vi at

$$\begin{aligned} b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} a &= 2(\sqrt{3}a + x) \cdot a \\ b &= \sqrt{2}(\sqrt{3}a + x) \end{aligned}$$

Av løsningen i oppgave a) har vi at $AC = (\sqrt{2} + \sqrt{6})AF$, og dermed er $b = a\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$. Altså er $x = a$, som betyr at $\triangle AFD$ er en 45°, 45°, 90° trekant. Ved å betrakte vinkelsummen i $\triangle CAF$, finner vi da at

$$\begin{aligned} \angle DAC &= 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ - 45^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

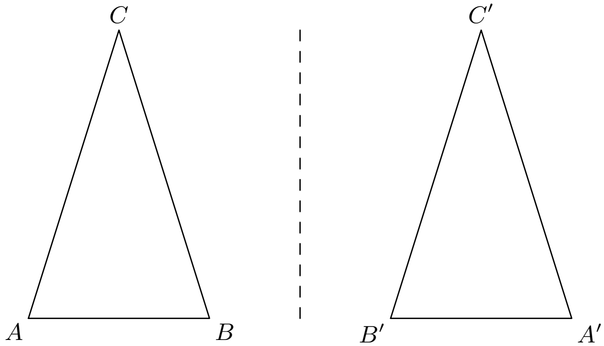
Alternativ metode for å vise at $x = a$

Av Pytagoras' setning på $\triangle ACF$ har vi at

$$\begin{aligned} AC^2 &= FC^2 + AF^2 \\ 2(\sqrt{3}a + x)^2 &= (\sqrt{3}a + 2x)^2 + a^2 \\ x^2 &= a^2 \end{aligned}$$

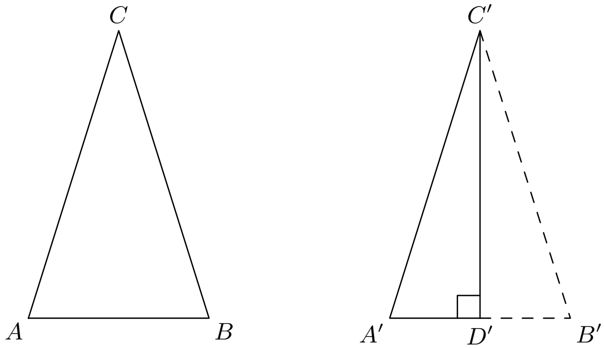
Gruble 71

a) **Alternativ 1**



Vi lar $\triangle A'B'C'$ være en speilet utgave av $\triangle ABC$. Da $\angle C = \angle C'$, $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB}$ og $\frac{AC}{B'C'} = \frac{BC}{A'C'}$, har vi av vilkår (iii) i regel 11.16 at $\triangle ABC \sim \triangle BA'C'$. Mer spesifikt betyr dette at AC er den samsvarende siden til $B'C'$, som betyr at $\angle B = \angle A' = \angle A$.

Alternativ 2



Vi kan alltids konsturere en rettvinklet trekant $\triangle A'D'C'$ hvor $2AD' = AB$ og $A'C' = AC$. Ved å la B' være A' speilet om $C'D'$, har vi at $\angle A' = \angle B$ og $B'C' = A'C$. Dermed har $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ parvis like lange sider, og er derfor kongruente. Da AB er den samsvarende siden til $A'B'$, er BC den samsvarende siden enten til $B'C'$ eller til $A'C'$. Uansett hvilke to av disse det er, har vi at $\angle A = \angle A' = \angle B'$, og tilsvarende er $\angle B = \angle A' = \angle B'$.

b) Vi plasserer D på forlengelsen av CB slik at $CD = CA$. Av oppgave a) er da $\angle DAC = \angle D$, som betyr at

$$\angle BAC < \angle D \qquad , \qquad \angle D - \angle BAC > 0 \tag{7}$$

Videre er $\angle C = 180^\circ - 2\angle D$, og da er

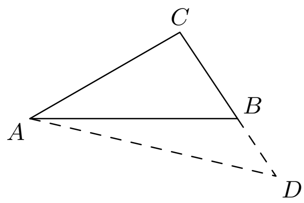
$$B = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 2\angle D - \angle BAC \tag{8}$$

Av (7) og (8) har vi at

$$\angle B > \angle D$$

Dermed er

$$\angle BAC < \angle D < \angle B$$



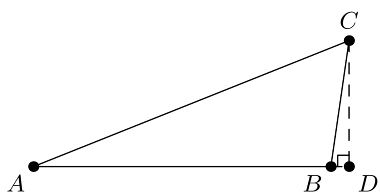
c) Hvis CD ligger utenfor $\triangle ABC$, har vi av Pytagoras' setning at

$$(AB + DB)^2 = AC^2 - CD^2$$

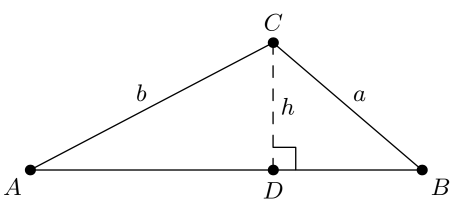
Dette betyr at

$$(AB + DB)^2 < AC^2$$
$$AB^2 < AC^2$$
$$AB < AC$$

Da AB er den lengste siden i $\triangle ABC$, er dette en selvmotsigelse, og dermed må CD ligge inni trekanten.



d) At $a + c > b$ og at $b + c > a$ følger direkte av at c er den største lengden. Av oppgave c) vet vi at CD ligger inni $\triangle ABC$, som vist i figuren under.



Av Pytagoras' setning har vi at

$$b^2 = AD^2 + h^2 \qquad , \qquad a^2 = BD^2 + h^2$$

Som betyr at

$$b > AD \qquad , \qquad a > BD$$

Da $c = AD + DB$, er dermed

$$c < b + a$$