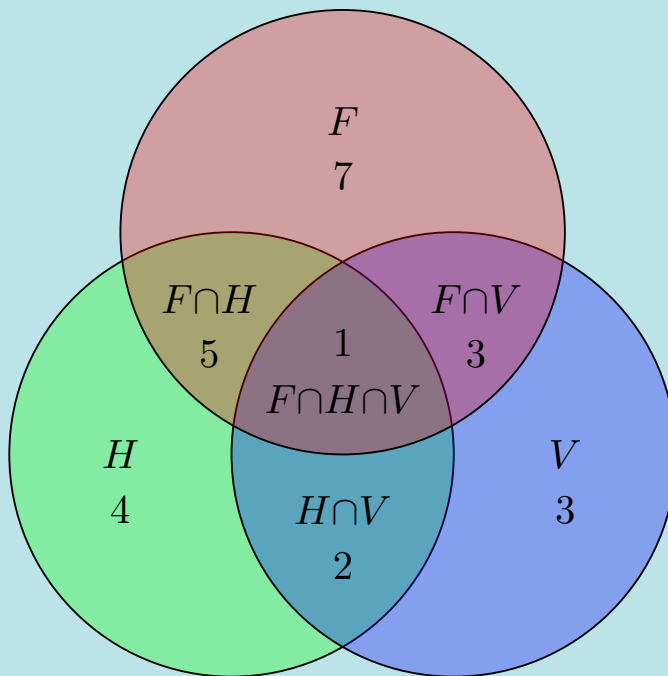


Anvendt matematikk grunnskole og VGS



*”Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt”*

*”Det er ikke å vite, men å lære,
ikke å eie, men å tilegne seg,
ikke å være til stede, men å komme dit,
som gir den største gleden.”*

— Carl Friedrich Gauss

Teksten er skrevet i L^AT_EX og figurene er lagd ved hjelp av Asymptote.

This book is part of the [OpenMathBooks](#) project. OpenMathBooks © 2022 by Sindre Sogge Heggen is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

19.11.2025

Forord til lærere

Bokas bruksområde

Sammen med [Matematikens byggesteiner](#) (MB) dekker denne boka matematikk for 5.-10. klasse og for VGS-fagene 1P og 2P. Mens MB tar for seg de teoretiske grunnprinsippene matte er bygd på, er denne boka ment for å vise hvordan matte kan anvendes i det daglige. Det er likevel med en viss ambivalens jeg bruker ordet ”anvendt”. Jeg er hellig overbevist om at de aller fleste har behov å bruke matematikk i konkrete, praktiske situasjoner for å få opplevelsen av at matematikk blir anvendt. Jeg håper derfor disse gratis-bøkene kan frigi midler for skoler, som da kan investere i utstyr som gjør at elever (og lærere) får måle, estimere, kalkulere og vurdere ut i fra reelle situasjonar.

Bokas disponering

Da boka gaper over matematikk for 5. klasse og helt til VGS, vil kanskje mange mene at språket er noe avansert, spesielt for de yngste. Men forenklinger fører ofte til at man stadig må vende tilbake til tema for å kommentere nye utvidelser og/eller unntak, og da dannes det fort et unødig kronglete og innviklet bilde av matematikkens struktur. Jeg tror man i lengden er tjent med å presentere temaene så utfyllende som mulig, og heller bruke god tid på å forstå dem én gang for alle.

Noen vil kanskje også reagere på at eksemplene er veldig enkle, at de viser få sammensatte problemer. Én av grunnene til dette er at slik vil det faktisk være for de aller fleste etter endt skolegang; det handler om å bruke formler direkte. En annen grunn er at jeg mener det å mestre likninger er den overlegent beste måten å løse sammensatte problemer på, og derfor handler nesten hele kapittel 6 om problemløsning.

Tilbakemeldinger og eventuelle endringer

Jeg håper å høre fra deg med tilbakemeldinger om boka. Merk likevel at alle har sine tanker om hvordan en lærebok ideelt sett bør utformes, så ikke tolk det som utakknemlighet hvis forslag til endringer ikke tas til etterretning. Alle bøker i [OpenMathBooks](#)-serien har åpen kildekode; med litt kunnskaper om Git og L^AT_EX kan du enkelt gjøre endringer slik det passer deg og din klasse!

Innhold

1	Størrelser og enheter	7
1.1	Størrelser, enheter og prefikser	8
1.2	Regning med størrelser	11
1.3	Proporsjonale størrelser	13
1.4	Regning med forskjellige benevninger	16
	Oppgaver	18
2	Statistikk	21
2.1	Introduksjon	22
2.2	Presentasjonsmetoder	24
2.2.1	Frekvenstabell	24
2.2.2	Søylediagram (stolpediagram)	26
2.2.3	Sektordiagram (kakediagram)	27
2.2.4	Linjediagram	28
2.3	Tolking av tendenser; sentralmål	29
2.3.1	Typetall	29
2.3.2	Gjennomsnitt	30
2.3.3	Median	34
2.4	Tolking av forskjeller; spredningsmål	37
2.4.1	Variasjonsbredde	37
2.4.2	Kvartilbredde	38
2.4.3	Avvik, varians og standardavvik	40
	Oppgaver	43
3	Brøkregning	49
3.1	Brøkdeler av helheter	50
3.2	Prosent	52
3.2.1	Prosenttall	52
3.2.2	Prosentdeler	56
3.2.3	Prosentvis endring; økning eller reduksjon	57
3.2.4	Vekstfaktor	60
3.2.5	Prosentpoeng	65
3.2.6	Gjentatt prosentvis endring	69
3.3	Forhold	71
3.3.1	Målestokk	72
3.3.2	Blandingsforhold	75
	Oppgaver	78
4	Økonomi	85
4.1	Indeksregning	86

4.1.1	Introduksjon	86
4.1.2	Konsumprisindeks og basisår	86
4.1.3	Kroneverdi	88
4.1.4	Reallønn og nominell lønn	89
4.2	Lån og sparing	92
4.2.1	Lån	92
4.2.2	Sparing; innskuddsrente og forventet avkastning	97
4.3	Skatt	99
4.3.1	Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag	99
4.3.2	Trygdeavgift	100
4.3.3	Trinnskatt	101
4.3.4	Nettolønn	103
4.4	Budsjett og regnskap	104
4.4.1	Budsjett	104
4.4.2	Regnskap	105
	Oppgaver	106
5	Sannsynlighet	111
5.1	Grunnprinsippet	112
5.2	Hendelser med og uten felles utfall	114
5.2.1	Hendelser uten felles utfall	114
5.2.2	Summen av alle sannsynligheter er 1	116
5.2.3	Felles utfall	118
5.2.4	Vennndiagram	121
5.2.5	Krysstabell	126
5.3	Gjentatte trekk	127
5.3.1	Permutasjoner	127
5.3.2	Sannsynlighet ved gjentatte trekk	130
5.3.3	Valgtre	132
	Oppgaver	136
6	Ligninger, formler og funksjoner	139
6.1	Å finne størrelser	140
6.2	Regresjon	146
6.3	Vekstfart, fart og akselerasjon	149
	Oppgaver	152
7	Digitale verktøy	161
7.1	Introduksjon til Python	162
7.1.1	Objekt, type, funksjon og uttrykk	162
7.1.2	Egne funksjoner	167
7.1.3	Boolske verdier og vilkår	168
7.1.4	Uttrykkene <code>if</code> , <code>else</code> og <code>elif</code>	169

7.1.5	Lister	171
7.1.6	Looper; <code>for</code> og <code>while</code>	176
7.1.7	<code>input()</code>	177
7.1.8	Moduler	178
7.1.9	Feilmeldinger	179
7.1.10	NumPy	180
7.2	Regneark	182
7.2.1	Introduksjon	182
7.2.2	Utregninger	182
7.2.3	Cellereferanser	183
7.2.4	Kopiering og låsing av celler	184
7.2.5	Andre nyttige funksjoner	186
7.3	GeoGebra	187
7.3.1	Introduksjon	187
7.3.2	Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer	187
7.3.3	Å finne verdien til funksjoner og linjer	189
7.3.4	CAS	191
7.3.5	Knapper og kommandoer	195
	Oppgaver	203
8	Numeriske metoder	207
8.1	Newtons metode	207
8.2	Trapesmetoden	210
	Oppgaver	212
9	Blandende oppgaver	215
9.1	Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten	215
9.2	Praktiske oppgaver	230
9.3	Eksamensoppgaver	235
9.4	Teoretiske utvidelser	240
	Vedlegg	246
	Fasit	249

Kapittel 1

Størrelser og enheter

1.1 Størrelser, enheter og prefikser

Det vi kan måle og uttrykke med tall, kaller vi **størrelser**. En størrelse består av en **verdi** (også kalt **måltall**) og en potensiell **benevning**. En størrelse uten benevning kalles en **dimensjonsløs** størrelse. En benevning er satt sammen av en **prefiks** og en **enhet**. I denne seksjonen skal vi se på disse fire enhetene:

enhet	forkortelse	enhet for
meter	m	lengde
gram	g	masse
sekund	s	tid
liter	L	volum

Prefikser er ord som er synonyme for verdier. Her er prefiksene man oftest¹ møter i hverdagen:

prefiks	forkortelse	verdi
kilo	k	1 000
hekto	h	100
deka	da	10
desi	d	0,1
centi	c	0,01
milli	m	0,001

Ofte er det behov for å gjøre om fra én benevning til en annen. Da er det god hjelp i å skrive tabellen over vannrett (se neste side), med 'meter', 'gram', 'sekund' eller 'liter' lagt til i midten².

Språkboksen

Obs! Mange tekster skiller ikke mellom ordene *benevning* og *enhet*.

¹Unntaket er 'deka', som er en veldig lite brukt prefiks, men vi har tatt den med fordi den kompletterer tallmønsteret.

²Legg merke til at 'meter', 'gram', 'sekund' og 'liter' er *enheter*, mens 'kilo', 'hekto' osv. er *tall*. Det kan derfor virke litt rart å sette dem opp i samme tabell, men for vårt formål fungerer det helt fint.

1.1 Omgjøring av prefikser

Når vi skal endre benevnelse kan vi bruke denne tabellen:

| kilo | hekto | deka | m/g/L/s | desi | centi | milli |

Komma må flyttes like mange ganger som antall ruter vi må flytte oss fra opprinnelig prefiks til ny prefiks.

For lengde brukes også enheten 'mil' (1 mil = 10 000 m). Denne kan legges på til venstre for 'kilo'.

Flytting av komma

Se [MB](#) for introduksjon til flytting av komma.

Eksempel 1

Skriv om 23,4 mL til antall L.

Svar

Vi skriver tabellen vår med L i midten, og legger merke til at vi må **tre ruter til venstre** for å komme oss fra mL til L:

| kilo | hekto | deka | L | desi | centi | milli |

Dermed er

$$23,4 \text{ mL} = 0,0234 \text{ L}$$

Eksempel 2

Skriv om 30 hg til antall cg.

Svar

Vi skriver tabellen vår med 'g' i midten, og legger merke til at vi må **fire ruter til høyre** for å komme oss fra hg til cg:

| kilo | hekto | deka | g | desi | centi | milli |

Dermed er

$$30 \text{ hg} = 300\,000 \text{ cg}$$

Eksempel 3

Skriv om 2,7 s til antall ms.

Svar

Vi skriver tabellen vår med 's' i midten, og legger merke til at vi må **tre ruter til høyre** for å komme oss fra s til ms:

| kilo | hekto | deka | s | desi | centi | milli |

Dermed er

$$2,7 \text{ s} = 2\,700 \text{ ms}$$

Eksempel 4

Gjør om 12 500 dm til antall mil.

Svar

Vi skriver tabellen vår med m i midten, legger til 'mil', og merker oss at vi må **fem ruter til venstre** for å komme oss fra dm til mil:

| mil | kilo | hekto | deka | m | desi | centi | milli |

Dermed er

$$12\,500 \text{ dm} = 0,125 \text{ mil}$$

1.1 Omgjøring av prefikser (forklaring)

Omgjøring av prefikser handler om å gange/dele med 10, 100 og så videre (se MB).

La oss som første eksempel skrive om 3,452 km til antall meter.

Vi har at

$$\begin{aligned} 3,452 \text{ km} &= 3,452 \cdot 1000 \text{ m} \\ &= 3\,452 \text{ m} \end{aligned}$$

La oss som andre eksempel skrive om 47 mm til antall meter. Vi har at

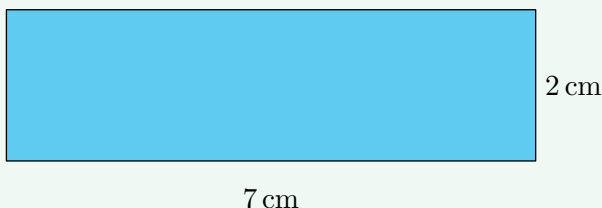
$$\begin{aligned} 47 \text{ mm} &= 47 \cdot \frac{1}{1000} \text{ m} \\ &= (47 : 1000) \text{ m} \\ &= 0,047 \text{ m} \end{aligned}$$

1.2 Regning med størrelser

Merk: I eksemplene til denne seksjonen bruker vi areal- og volumformler som du finner i [MB](#).

I utregninger behandler vi benevninger på samme måte som vi behandler variabler i algebra¹. På samme måte som at $a + a = 2a$, er $1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$, og på samme måte som at $2a \cdot 3a = 6a^2$, er $2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$.

Eksempel 1



- Finne omkretsen til rektangelet.
- Finne arealet til rektangelet.

Svar

- Omkretsen til rektangelet er

$$7 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

- Arealet til rektangelet er

$$7 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 14 \text{ cm}^2$$

Eksempel 2

En sylinder har radius 4 cm og høyde 2 cm. Finn volumet til sylindren.

Svar

$$\text{grunnflatearealet til sylindren} = \pi \cdot (4 \text{ cm})^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{volumet til sylindren} = 16\pi \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} = 32\pi \text{ cm}^3$$

¹Se kapittelet om algebra i [MB](#).

Per

Mange benevninger inneholder ordet *per* når vi uttaler dem. For eksempel vil melk koste ca. 25 kr per liter. Dette betyr at for hver hele liter melk vi kjøper, må vi betale 25 kroner. Matematisk sett betyr *per* at benevningen som står etter ordet skal stå i nevner. I stedet for å skrive at melk koster 25 kr per liter kan vi skrive at melk koster $25 \frac{\text{kr}}{\text{liter}}$. Gjerne skriver man dette som 25 kr/liter.

Eksempel 3

En type poteter koster 20 kr/kg. Hvor mye koster 5 kg poteter?

Svar

$$\text{pris} = 20 \frac{\text{kr}}{\text{kg}} \cdot 5 \text{ kg} = 100 \text{ kr}$$

5 kg poteter koster 100 kr.

Å regne uten benevning

Når vi bruker matematikk i praksis er benevninger helt avgjørende. Å si at en gjenstand har omkrets 10 gir oss ingen informasjon så lenge vi ikke vet om det er snakk om antall mm, antall km eller hva det skulle være. Samtidig kan utregninger bli noe rotete hvis man tar med benevninger. Hvis vi er helt sikre på hvilken benevning vi får i svaret på et utregning, kan vi regne uten benevning. Da foretar vi utregningen bare mellom måltallene, og oppgir svaret til slutt med benevning. I denne boka skal vi vise til at vi regner uten benevninger ved å skrive

* bak størrelsene.

Eksempel 4

En trekant har grunnlinje 5 cm og høyde 8 cm. Finn arealet til trekanten.

Svar

$$\text{arealet til trekanten}^* = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$$

Arealet til trekanten er 20 cm^2 .

1.3 Proporsjonale størrelser

I MB definerte vi proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser. Anvendt matematikk er full av størrelser som er proporsjonalitetskonstanter, og i definisjonsboksene under finner du et utvalg av disse. Legg merke til at formlene som vises matematisk sett er like, det er bare navnene på størrelsene og enhetene som er forskjellige.

1.2 Kilopris

Kilopris gir forholdet mellom en pris (i kr) og en vekt (i kilogram)

$$\text{kilopris} = \frac{\text{pris}}{\text{vekt}} \quad (1.1)$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{pris} = \text{kilopris} \cdot \text{vekt} \quad (1.2)$$

Benevningen for kilopris er 'kr/kg'.

1.3 Literpris

Literpris gir forholdet mellom en pris (i kr) og et volum (i liter)

$$\text{literpris} = \frac{\text{pris}}{\text{volum}} \quad (1.3)$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{pris} = \text{literpris} \cdot \text{volum} \quad (1.4)$$

Benevningen for literpris er 'kr/L'.

1.4 Fart

Fart gir forholdet mellom en lengde og en tid.

$$\text{fart} = \frac{\text{lengde}}{\text{tid}} \quad (1.5)$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{lengde} = \text{fart} \cdot \text{tid} \quad (1.6)$$

Vanlige benevninger for fart er 'km/h' og 'm/s'. 'h' står for 'time' ('hour' på engelsk).

1.5 Tetthet

Tetthet gir forholdet mellom en vekt og et volum.

$$\text{tetthet} = \frac{\text{vekt}}{\text{volum}} \quad (1.7)$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{vekt} = \text{tetthet} \cdot \text{volum} \quad (1.8)$$

Vanlige benevninger for tetthet er 'kg/m³' og 'g/cm³'

1.6 Effekt

Effekt gir forholdet mellom energi og tid

$$\text{effekt} = \frac{\text{energi}}{\text{tid}} \quad (1.9)$$

Alternativt kan vi skrive

$$\text{energi} = \text{effekt} \cdot \text{tid} \quad (1.10)$$

Vanlige benevninger for effekt er 'W' og 'kW'. 'W' står for 'Watt'. 'Watt' kan også skrives som 'J/s', hvor 'J' står for 'Joule'. 'Joule' er en enhet for energi.

Merk

I regel 1.2-regel 1.6 er det antatt at størrelsene på venstre side av brøken er konstanter, men det er ikke alltid slik. Lar du en stein falle fra en høyde, vil den åpenbart ikke ha den samme farten hele tiden. Ved å dele lengden den har falt med tiden det tok, vil du finne *hvilken fart ballen ville hatt dersom den skulle kommet seg like langt på den samme tiden, dersom farten var den samme hele tiden.*

1.4 Regning med forskjellige benevninger

Når vi skal utføre regneoperasjoner med størrelser som har benevning, er det helt avgjørende at vi passer på at benevningene som er involvert er like.

Eksempel 1

Regn ut $5 \text{ km} + 4000 \text{ m}$.

Svar

Her må vi enten gjøre om 5 km til antall m eller 4000 m til antall km før vi kan legge sammen verdiene. Vi velger å gjøre om 5 km til antall m :

$$5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} 5 \text{ km} + 4000 \text{ m} &= 5000 \text{ m} + 4000 \text{ m} \\ &= 9000 \text{ m} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Hvor langt kjører en bil som holder farten 90 km/h i 45 minutt ?

Svar

Her har vi to forskjellige enheter for tid involvert; 'timer' ('h') og 'minutt' ('min'). Da må vi enten gjøre om farten til antall 'km/min' eller tiden til antall 'h'. Vi velger å gjøre om antall 'min' til antall 'h'¹:

$$45 \text{ min} = \frac{45}{60} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h}$$

Av ligning (1.6) har vi at

$$\text{strekning}^* = 90 \cdot \frac{3}{4} = 67,5$$

Altså har bilen kjørt $67,5 \text{ km}$.

¹Husk at $60 \text{ min} = 1 \text{ h}$.

Eksempel 3

Safran går for å være verdens dyreste krydder. 5 g kan koste 600 kr. Hva er da kiloprisen på safran?

Svar

Her har vi to forskjellige benevninger for vekt involvert; 'kg' og 'g'. Vi gjør om antall 'g' til antall 'kg':

$$5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$$

I ligning (1.1) er nå prisen 600 og vekten 0,005, og da er

$$\text{kilopris}^* = \frac{600}{0,005} = 120\,000$$

Altså koster safran 120 000 kr/kg.

Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Gjør om til antall meter.

- a) 484 km b) 91 km c) 2 402 km

1.1.2

Gjør om til antall gram.

- a) 484 kg b) 91 hg c) 2 402 hg

1.1.3

Gjør om til antall liter

- a) 480 dl b) 9100 cl c) 24 000 cl

1.1.4

Gjør om

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a) 12,4 m
til antall km. | f) 9,7 g
til antall hg. | k) 89 dl
til antall l. |
| b) 42 dm
til antall m. | g) 0,15 mg
til antall g. | l) 691,4 l
til antall cl. |
| c) 58,15 cm
til antall mm. | h) 1,419 hg
til antall mg. | m) 15 l
til antall ml. |
| d) 0,0074 km
til antall m. | i) 31 mg
til antall hg. | n) 918 cl
til antall l. |
| e) 0,15 m
til antall cm. | j) 64 039 mg
til antall kg. | o) 0,55 dl
til antall ml. |

1.2.1

En prisme har lengde 9 cm, bredde 10 cm og høyde 8 cm.

Finn volumet til prismet.

1.2.2

En kjele har radius 6 dm og høyde 4 dm.

- a) Finn volumet til kjele.

b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.2.3

En firkantet pyramide har lengde 4 cm, bredde 9 cm og høyde 10 cm.

- a) Finn volumet til kjeglen.
- b) Hvor mange liter rommer kjeglen?

1.3.1

- a) En bil kjører i 60 km/h i 3 h. Finn lengden bilen har kjørt.
- b) En bil kjører i 50 km/h i 4,25 h. Finn lengden bilen har kjørt.
- c) En bil kjører 375 km i løpet av 5 h. Hvilken fart har bilen?

1.3.2

- a) 10 kg tomater koster 35 kr. Hva er kiloprisen til tomatene?

1.3.3

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58

- a) Hvis Bolts fart hadde vært den samme under hele løpet, hva hadde farten hans vært da?
- b) Hvorfor er det *ikke* rimelig å anta at Bolt hadde den samme farten under hele løpet?
- c) Anta at Bolt under dette løpet nådde den høyeste farten et menneske har sprunget. Finn en tilnærming til denne farten.

1.4.1

Gjør om svarene fra [oppgave 1.3.3](#) a) og c) til hastigheter oppgitt i 'km/h'.

1.4.2

Skriv ned eksempel på et dyr, et insekt, en gjenstand eller annet som veier mellom 1-100 mg, cg, dg, g, dag, hg og kg.

1.4.3 (1PH23D1)

Tobias lurte på hvor mye vann han bør drikke hver dag.

Han finner ulike svar på ulike nettsider.

På en nettside finner han teksten nedenfor.

Voksne har hvert døgn behov for ca. 30 mL væske per kilogram kroppsvekt. Husk at vann er den beste tørstedrikken.

Tobias veier 70 kg.

Hvor mange liter vann bør Tobias drikke i løpet av et døgn ifølge nettsiden?

Gruble 1

(1PH23D1)

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder med konstant temperatur er proporsjonal med spenningen Ω og omvendt proporsjonal med motstanden R i lederen.

Argumenter for om hver av påstandene er sann eller usann.

- 1) Hvis vi øker spenningen, vil strømmen også øke.
- 2) Hvis vi øker motstanden, vil strømmen også øke.

Kapittel 2

Statistikk

2.1 Introduksjon

I en **undersøkelse** henter vi inn informasjon. Denne informasjonen kan gjerne være tall eller ord, og kalles **data**. En samling av innhentet data kalles et **datasett**.

For eksempel, tenk at du spør to mennesker om de liker kaviar. Den ene svarer "ja", den andre "nei". Da er "ja" og "nei" dataene (svarene) du har samlet inn, og {"ja", "nei"} er datasettet ditt.

Statistikk handler grovt sett om to ting; å *presentere* og å *tolke* innsamlede data. For begge disse formålene har vi noen begrep som vi i kommende seksjoner skal studere ved hjelp av forskjellige eksempler på undersøkelser. Disse eksemplene finner du på side 23.

Det er ikke noen fullstendige fasitsvar på hvordan en presenterer eller tolker data, men to retningslinjer bør du alltid ha med deg:

- La det alltid komme tydelig fram hva du har undersøkt, og hvilke data som er innhentet.
- Tenk alltid over hvilke metoder du bruker for å tolke dataene.

Språkboksen

Personer som deltar i en undersøkelse der man skal svare på spørsmål kalles **respondenter**.

Undersøkelse 1

10 personer testet hvor mange sekunder de kunne holde pusten. Resultatene ble disse:

47 124 61 38 97 84 101 79 56 40

Undersøkelse 2

15 personer ble spurt hvor mange epler de spiser i løpet av en uke. Svarene ble disse:

7 4 5 4 1 0 6 5 4 8 1 6 8 0 14

Undersøkelse 3

300 personer ble spurt hva deres favorittdyr er.

- 46 personer svarte tiger
- 23 personer svarte løve
- 17 personer svarte krokodille
- 91 personer svarte hund
- 72 personer svarte katt
- 51 personer svarte andre dyr

Undersøkelse 4

Mobiltelefoner med smartfunksjoner (app-baserte) kom på det norske markedet i 2009. Tabellen¹ under viser det totale salget mobiltelefoner i tidsperioden 2009-2014, og andelen med og uten smartfunksjoner. Salgstallene oppgir antall 1 000 telefoner.

År	2009	2010	2011	2012	2013	2014
totalt	2 365	2 500	2 250	2 200	2 400	2 100
u. sm.f.	1 665	1 250	790	300	240	147
m. sm.f.	700	1 250	1 460	1 900	2 160	1 953

¹Tallene er hentet fra medienorge.uib.no.

2.2 Presentasjonsmetoder

Skal vi presentere våre undersøkelser, bør vi vise datasettene slik at det er lett for andre å se hva vi har funnet. Dette kan vi gjøre blant annet ved hjelp av **frekvenstabeller**, **søylediagram**, **sektordiagram** eller **linjediagram**.

2.2.1 Frekvenstabell

I en frekvenstabell setter man opp dataene i en tabell som viser hvor mange ganger hvert unike svar dukker opp. Dette antallet kalles **frekvensen**.

Undersøkelse 2

I vår undersøkelse har vi to 0, to 1, tre 4, to 5, to 6, én 7, to 8 og én 14. I en frekvenstabell skriver vi da

antall epler	frekvens
0	2
1	2
4	3
5	2
6	2
7	1
8	2
14	1

Hvis vi, som her, har svar vi kan rangere fra minst til størst, kan vi også finne summen av frekvensene opp til et svar. Dette kalles **kumulativ frekvens**

antall epler	frekvens	kumulativ frekvens
0	2	2
1	2	$2 + 2 = 4$
4	3	$4 + 3 = 7$
5	2	$7 + 2 = 9$
6	2	$9 + 2 = 11$
7	1	$11 + 1 = 12$
8	2	$12 + 2 = 14$
14	1	$14 + 1 = 15$

Ofte kan det være greit å vite hvor høy frekvensen er relativ til summen av alle frekvensene. Dette kalles **relativ frekvens**:

antall epler	frekvens	relativ frekvens	relativ frekvens (%)
0	2	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	13.33%
1	2	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	13.33%
4	3	$\frac{3}{15} = 0.2$	20%
5	2	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	13.33%
6	2	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	13.33%
7	1	$\frac{1}{15} \approx 0.0667$	6.67%
8	2	$\frac{2}{15} \approx 0.1333$	13.33%
14	1	$\frac{1}{15} \approx 0.0667$	6.67%
sum	15		

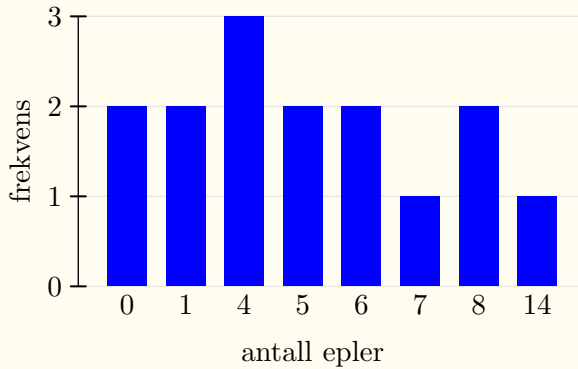
På samme måte som for *relativ frekvens* kan vi finne **relativ kumulativ frekvens**.

2.2.2 Søylediagram (stolpediagram)

Med et søylediagram presenterer vi dataene med søyler som viser frekvensen.

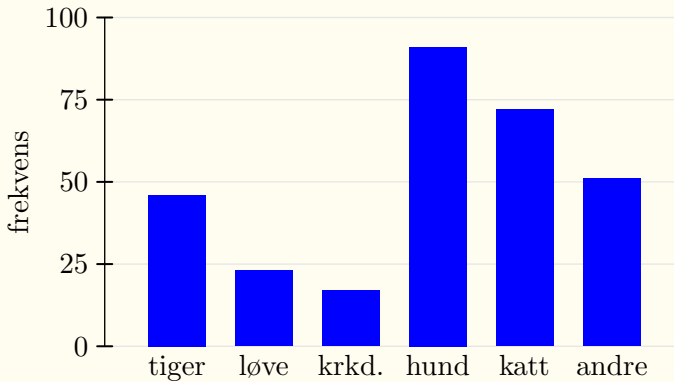
Undersøkelse 2

”Hvor mange epler spiser du i løpet av uka?”



Undersøkelse 3

”Hva er favorittdyret ditt?”

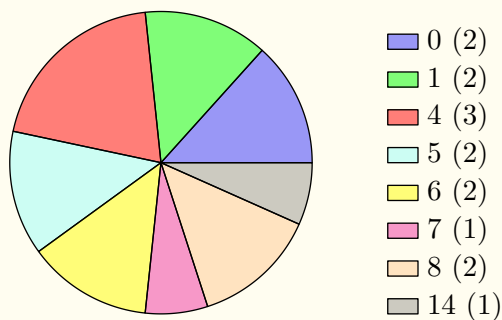


2.2.3 Sektordiagram (kakediagram)

I et sektordiagram vises frekvensene som sektorer av en sirkel.

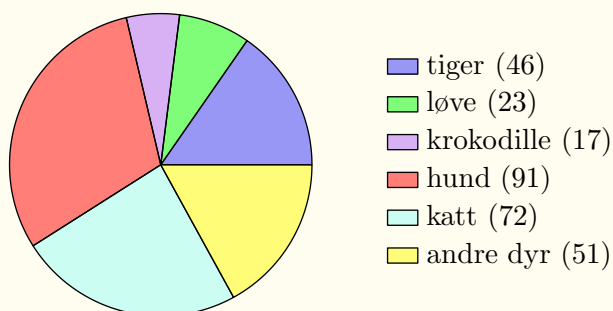
Undersøkelse 2

Epler spist i løpet av uka (frekvens i parentes)



Undersøkelse 3

Favorittdyr (frekvens i parentes)

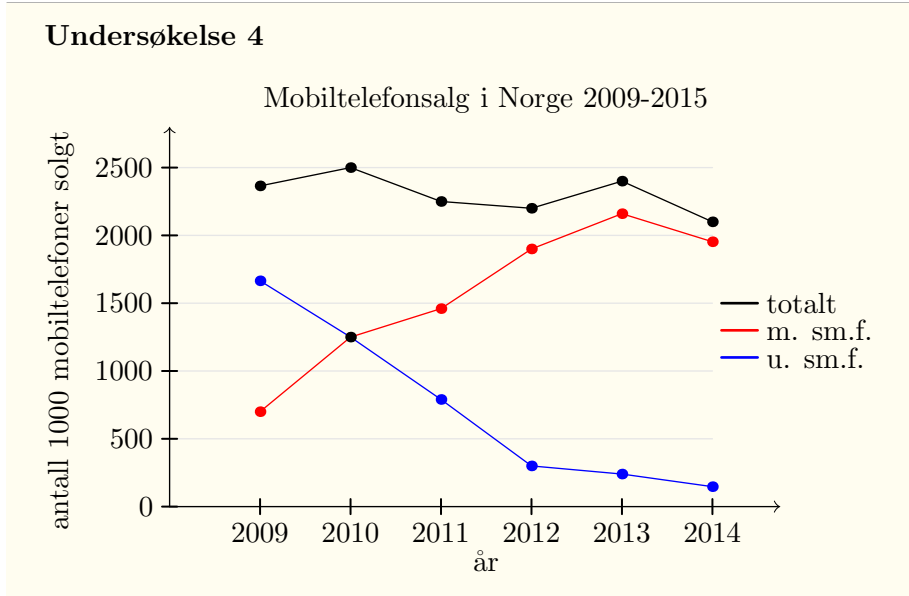


Å lage et sektordiagram for hånd

Skal du selv tegne et sektordiagram, trenger du kunnskaper om vinkler og om brøkandeler. Se [seksjon 3.1](#) og [MB](#)

2.2.4 Linjediagram

I et linjediagram legger vi inn dataene som punkt i et koordinatsystem, og trekker en linje mellom dem. Linjediagram brukes oftest når det er snakk om en form for utvikling.



2.3 Tolking av tendenser; sentralmål

I et datasett er det gjerne svar som er helt eller tilnærmet like, og som gjentar seg. Dette betyr at vi kan si noe om hva som gjelder for mange; en **tendens**. De matematiske begrepene som forteller noe om dette kalles **sentralmål**. De vanligste sentralmålene er **typetall**, **gjennomsnitt** og **median**.

2.3.1 Typetall

2.1 Typetall

Typetallet er verdien det er flest eksemplarer av i datasettet.

Undersøkelse 2

I datasettet er det verdien 4 som opptrer flest (tre) ganger. 4 er altså typetallet.

Flere typetall

Hvis flere verdier opptrer oftest i et datasett, har datasettet flere typetall.

2.3.2 Gjennomsnitt

Når svarene i et datasett er tall, kan vi finne summen av svarene. Når vi spør hva gjennomsnittet er, spør vi om dette:

”Hvis alle svarene hadde lik verdi, og summen var den samme, hvilken verdi måtte alle svarene da ha hatt?”

Dette finner vi ved divisjon¹:

2.2 Gjennomsnitt

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{summen av verdiene fra datasettet}}{\text{antall verdier}}$$

Undersøkelse 1

Vi summerer verdiene fra datasettet, og deler med antall verdier:

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{47 + 124 + 61 + 38 + 97 + 84 + 101 + 79 + 56 + 40}{10} \\ &= \frac{727}{10} \\ &= 72,7\end{aligned}$$

I gjennomsnitt holdt de 10 deltakerne pusten i 72,7 sekunder.

¹se [MB](#), side 23.

Undersøkelse 2

Metode 1

$$\begin{aligned}\text{gjennomsnitt} &= \frac{7 + 4 + 5 + 4 + 1 + 0 + 6 + 5 + 4 + 8 + 1 + 6 + 8 + 0 + 14}{15} \\ &= \frac{73}{15} \\ &\approx 4.9\end{aligned}$$

I gjennomsnitt spiser de 15 respondentene 4,9 epler i uka.

Metode 2

Vi utvider frekvenstabellen fra side 24 for å finne summen av verdiene fra datasettet (vi har også tatt med summen av frekvensene):

Antall epler	Frekvens	antall · frekvens
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	2	$1 \cdot 2 = 2$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
5	2	$5 \cdot 2 = 10$
6	2	$6 \cdot 2 = 12$
7	1	$7 \cdot 1 = 14$
8	2	$8 \cdot 2 = 16$
14	1	$14 \cdot 1 = 14$
sum	15	73

Nå har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{73}{15} \approx 4,9$$

I gjennomsnitt spiser de 15 respondentene 4,9 epler i uka.

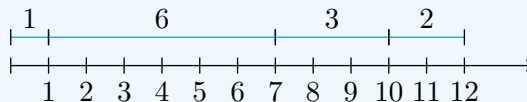
Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

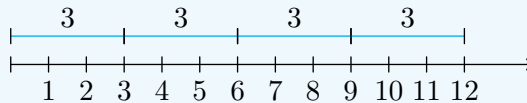
- Gjennomsnitt for totalt salg av mobiler: 2302
- Gjennomsnitt for salg av mobiler uten smartfunksjon: 732
- Gjennomsnitt for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

Lik fordeling

Legg merke til at gjennomsnitt handler om lik fordeling. Hvis vi har 4 linjestykker med respektive lengder 1, 6, 3 og 2, blir den samlede lengden $1 + 6 + 3 + 2 = 12$.



Dette betyr at gjennomsnittslengden er $\frac{12}{4} = 3$. Hvis vi kunne omformet linjestykkene slik at de ble like lange, ville altså hver av dem hatt lengde 3.



Gjennomsnittlig endring per enhet

Tenk deg at du på en løpetur gjør tre målinger av farten din. Datasettet du ender opp med er

$$10 \text{ m/s} \quad 10 \text{ m/s} \quad 10 \text{ m/s}$$

Gjennomsnittsfarten din var da

$$\frac{10 + 10 + 10}{3} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

Siden alle målinger av farten din hadde samme verdi, kan det være rimelig å anta at farten din var konstant. Og hvis den virkelig var det, ville alle målinger av farten din hatt samme verdi, uansett hvor mange målinger du tok. Dette gjør at en konstant fart fra [Definisjon 1.4](#) i dagligtale også kalles **gjennomsnittsfart**. Sagt på en annen måte er dette den gjennomsnittlige endringen i antall meter per sekund.

2.3 Gjennomsnittlig endring per enhet

Hvis vi antar at to størrelser er proporsjonale, kaller vi proporsjonalitetskonstanten¹ den **gjennomsnittlige endringen per enhet**.

¹Se seksjon 1.3

Undersøkelse 4

- For årene 2009 og 2010 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

$$\frac{1\,260 - 700}{2010 - 2009} = \frac{550}{1} = 550$$

Mellom 2009 og 2010 har altså salget av smarttelefoner i gjennomsnitt økt med 550 000 smarttelefoner per år.

- For årene 2010 og 2014 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

$$\frac{1\,953 - 1\,250}{2014 - 2010} = \frac{703}{4} = 175,75$$

Mellom 2010 og 2014 har altså salget av smarttelefoner i gjennomsnitt økt med 175 750 smarttelefoner per år.

- For årene 2013 og 2014 er differansen mellom smarttelefoner solgt delt på differansen mellom år gått lik

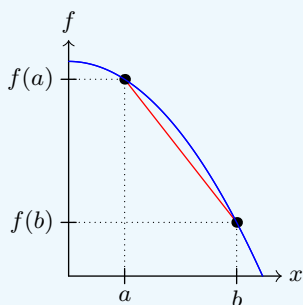
$$\frac{1\,953 - 2\,160}{2014 - 2013} = \frac{-207}{1} = -207$$

Mellom 2013 og 2014 har altså salget av smarttelefoner sunket med ca. 207 000 smarttelefoner per år.

Stigningstallet til linja mellom to punkt

Gitt en funksjon $f(x)$. I MB har vi sett at stigningstallet til linja mellom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er gitt som

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Sammenlikner vi dette uttrykket med utregningene fra side 33, ser vi at utregningene er identiske. Stigningstallet mellom to punkt på en graf gir oss dermed den gjennomsnittlige endringen per enhet.

2.3.3 Median

2.4 Median

Medianen er tallet som ender opp i midten av datasettet når det rangeres fra tallet med lavest til høyest verdi.

Hvis datasettet har partalls antall verdier, er medianen gjennomsnittet av de to verdiene i midten (etter rangering).

Undersøkelse 1

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

De to tallene i midten er 61 og 79. Gjennomsnittet av disse er

$$\frac{61 + 79}{2} = 70$$

Altså er medianen 70.

Undersøkelse 2

Vi rangerer datasettet fra lavest til høyest verdi:

0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14

Tallet i midten er 5, altså er medianen 5.

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Verdiene er rundet ned til nærmeste éner).

- Median for totalt salg av mobiler: 2307
- Median for salg av mobiler uten smartfunksjon: 545
- Median for salg av mobiler med smartfunksjon: 1570

2.4 Tolking av forskjeller; spredningsmål

Ofte vil det også være store forskjeller (stor spredning) mellom dataene som er samlet inn. De vanligste matematiske begrepene som forteller noe om dette er **variasjonsbredde**, **kvartilbredde**, **varians** og **standardavvik**.

2.4.1 Variasjonsbredde

2.5 Variasjonsbredde

Differansen mellom svarene med henholdsvis høyest og lavest verdi.

Undersøkelse 1

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 124 og 38.

Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 124 - 38 = 86$$

Undersøkelse 2

Svaret med henholdsvis høyest og lavest verdi er 14 og 0. Altså er

$$\text{variasjonsbredde} = 14 - 0 = 14$$

Undersøkelse 4

(Tallene er i antall tusener)

- Variasjonsbredde for mobiler totalt:

$$2\,500 - 2\,100 = 400$$

- Variasjonsbredde for mobiler uten smartfunksjoner:

$$1\,665 - 147 = 518$$

- Variasjonsbredde for mobiler med smartfunksjoner:

$$2\,160 - 700 = 1460$$

2.4.2 Kvartilbredde

2.6 Kvartilbredde og øvre og nedre kvartil

Kvartilbredden til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Ranger datasettet fra lavest til høyest verdi.
2. Skill det rangerte datasettet på midten, slik at to nye sett oppstår. (Viss det er oddetalls antall verdier i datasettet, utelates medianen).
3. Finn de respektive medianene i de to nye settene.
4. Finn differansen mellom medianene fra punkt 3.

Om medianene fra punkt 3: Den med høyest verdi kalles **øvre kvartil** og den med lavest verdi kalles **nedre kvartil**.

Undersøkelse 1

1. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

2. 38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

3. Medianen i det blå settet er 47 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 97 (øvre kvartil).

38 40 47 56 61 79 84 97 101 124

4. Kvartilbredde = $97 - 47 = 50$

Undersøkelse 2

1. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14

2. 0 0 1 1 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8 14

3. Medianen i det blå settet er 1 (nedre kvartil) og medianen i det røde settet er 7 (øvre kvartil).

0 0 1 1 4 4 4 5 6 6 7 8 8 14

4. Kvartilbredde = $7 - 1 = 6$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt. Tallene er i antall tusener)

- For mobiler totalt er kvartilbredden: 200
- For mobiler uten smartfunksjoner er kvartilbredden: 1010
- For mobiler med smartfunksjoner er kvartilbredden: 703

Språkboksen

Nedre kvartil, medianen og øvre kvartil blir også kalt henholdsvis **1. kvartil**, **2. kvartil** og **3. kvartil**.

2.4.3 Avvik, varians og standardavvik

2.7 Varians

Differansen mellom en verdi og gjennomsnittet i et datasett kalles **avviket** til verdien.

Variansen til et datasett kan finnes på følgende måte:

1. Kvadrer avviket til hver verdi i datasettet, og summer disse.
2. Divider med antall verdier i datasettet.

Standardavviket er kvadratroten av variansen.

Eksempel

Gitt datasettet

2 5 9 7 7

Da har vi at

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{2 + 5 + 9 + 7 + 7}{5} = 6$$

Og videre er

$$\begin{aligned} \text{variansen} &= \frac{(2 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (9 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (7 - 6)^2}{5} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Da er standardavviket $= \sqrt{5} \approx 2,23$.

Undersøkelse 1

(Utregning utelatt)

Variansen er 754,01. Standardavviket er $\sqrt{754,01} \approx 27,46$

Undersøkelse 2

Gjennomsnittet fant vi på side 31. Vi utvider frekvenstabellen vår fra side 24:

antall epler	frekvens	frekvens · kvadrert avvik
0	2	$2 \cdot \left(0 - \frac{73}{15}\right)^2$
1	2	$2 \cdot \left(1 - \frac{73}{15}\right)^2$
4	3	$3 \cdot \left(4 - \frac{73}{15}\right)^2$
5	2	$2 \cdot \left(5 - \frac{73}{15}\right)^2$
6	2	$2 \cdot \left(6 - \frac{73}{15}\right)^2$
7	1	$1 \cdot \left(7 - \frac{73}{15}\right)^2$
8	2	$2 \cdot \left(8 - \frac{73}{15}\right)^2$
14	1	$1 \cdot \left(14 - \frac{73}{15}\right)^2$
sum	15	189,7 $\bar{3}$

Altså er variansen

$$\frac{189,7\bar{3}}{15} \approx 12,65$$

Da er standardavviket $\sqrt{12,65} \approx 3,56$

Undersøkelse 4

(Utregning utelatt)

- For mobiler totalt er variansen 17 781,25 og standardavviket ca. 133,4.
- For mobiler uten smartfunksjoner er variansen 318 848,3 og standardavviket ca. 564,67
- For mobiler med smartfunksjoner er variansen 245 847,916 og standardavviket ca. 495,83.

Hvorfor innebærer variansen kvadrering?

La oss se hva som skjer hvis vi gjentar utregningen fra *Eksempel* på side 40, men uten å kvadrere:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 - 6) + (5 - 6) + (9 - 6) + (7 - 6) + (7 - 6)}{5} \\ &= \frac{2 + 5 + 9 + 7 + 7}{5} - 6 \quad (2.1) \end{aligned}$$

Men brøken $\frac{2+5+9+7+7}{5}$ er jo per definisjon gjennomsnittet til datasettet, og dermed blir uttrykket over lik 0. Dette vil gjelde for alle datasett, så i denne sammenhengen gir ikke tallet 0 noen ytterligere informasjon. Om vi derimot kvadrerer avvikene, unngår vi et uttrykk som alltid blir lik 0.

Oppgaver for kapittel 2

2.3.1

Gitt datasettet

2 12 3 0 2 5 8 2 11

Finn

- a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.2

Gitt datasettet

9 6 3 0 8 5 8 4 10 8 6

Finn

- a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.3

Gitt datasettet

11 7 16 0 8 9 8 5 16 5

Finn

- a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.4

Gitt datasettet

6 11 14 5 6 9 8 5 11 5 11 17

Finn

- a) typetallet b) medianen c) gjennomsnittet

2.3.5

Du ønsker å finne ut hva nordmenn flest har i formue¹, og bestemmer deg for å finne ut av dette ved å spørre fem tilfeldige personer du møter i gata. De fire første svarene (i kr) er disse:

3,2 millioner 2,9 millioner 1,8 millioner 4,2 millioner

Den siste personen du tilfeldigvis møter er personen i Norge med høyest formue. Hens svar er dette²:

20 915,3 millioner

- Finn medianen i datasettet.
- Finn gjennomsnittet i datasettet.
- Er det medianen eller gjennomsnittet som trolig best representerer hva nordmenn flest har i formue?

2.3.6

Lag en frekvenstabell for datasettet under. (La tittelen til venstre kolonne være "frukt".)

banan	eple	eple	eple	pære	banan	eple	pære
	appelsin	eple	pære	pære			

2.3.7

Lag en frekvenstabell for datasettet fra [oppgave 2.3.4](#). (La tittelen til venstre kolonne være "tall".)

2.3.8

- Lag et søylediagram for datasettet fra [oppgave 2.3.6](#).
- Lag et søylediagram for datasettet fra [oppgave 2.3.7](#).

2.3.9

- Lag et søylediagram for datasettet fra [oppgave 2.3.6](#).
- Lag et søylediagram for datasettet fra [oppgave 2.3.7](#).

¹Enkelt sagt er formue summen av penger du har i banken, verdier av hus, bil etc., fratrukket gjeld o.l.

²Tallet er basert på personen i Norge med høyest formue ut ifra ligningstallene for 2019.

2.3.10

Av de fire undersøkelsene på side 23, hvorfor har vi

- a) vist frekvenstabell bare for undersøkelse 2?
- b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?
- c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?
- d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.3.11

Hvis datasettet har partalls antall svar kan man også finne medianen slik:

1. Finn de to tallene i midten.
2. Finn differansen mellom tallene, og del denne med 2.
3. Legg resultatet fra punkt 2 til det laveste av de to tallene i midten.

Prøv metoden på datasettet fra [oppgave 2.3.3](#).

2.3.12

Tenk deg at noen i 2014 kom med følgende opplysning:

”Mellom 2006 og 2014 ble det i gjennomsnitt solgt flere mobiltelefoner uten smartfunksjon enn med.”

Hvorfor ville denne opplysningen være lite til hjelp hvis man skulle spå framtidige salg av mobiltelefoner med og uten smartfunksjoner?

2.3.13

Av de fire undersøkelsene på side 23, hvorfor har vi ikke funnet sentral- og spredningsmål for undersøkelse 3?

Gruble 2

Finn minst fem datasett som har følgende egenskaper:

- de består av fem positive heltall
- gjennomsnittet er 4
- medianen er 3
- typetallet er 3

Gruble 3

(GV23D1)

Tabellen nedenfor viser hastigheter målt i en fartskontroll. Alle hastighetene er mål i km/h.

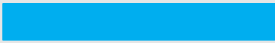










| 62 | 20 | 62 | 18 | 55 | 62 | 65 | 54 | 62 | 60 |

- a) Avgjør gjennomsnitt, median og typetall.
- b) Begrunn hvilket av sentralmålene du ville valgt for å beskrive bilenes hastighet.

Gruble 4

(GV23D1)

Tabellen nedenfor viser hvor mange elever som bruker skoleskyss fordelt på fylke.

Fylker	Antall elever	Andel i prosent
Viken	 26988	17,2%
Oslo	 3991	5,8%
Innlandet	 14889	37,7%
Vestfold og Telemark	 10281	21,2%
Agder	 9920	25,3%
Rogaland	 8190	12,7%
Vestland	 20265	26,4%
Møre og Romsdal	 8852	28,2%
Trøndelag	 15374	28,1%
Nordland	 7017	26,3%
Troms og Finmark	 8293	31,4%

Vurder om påstandene nedenfor er sanne eller usanne:

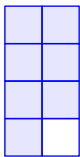
- Flere enn tre ganger så mange elever bruker skoleskyss i Innlandet som i Oslo.
- Gjennomsnittlig er det 5000 elever som bruker skoleskyss per fylke.
- I mer enn halvparten av fylkene er det under 25 som bruker skoleskyss.
- Viken har den største prosentandelen av elever som bruker skoleskyss.

Kapittel 3

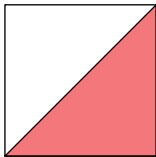
Brøkregning

3.1 Brøkdeler av helheter

I MB (s. 35-47) har vi sett hvordan brøker er definert ut fra en inndeling av 1. I hverdagen bruker vi også brøker for å snakke om inndelinger av en helhet:



(a)



(b)



(c)

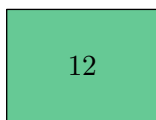
(a) Helheten er 8 ruter. $\frac{7}{8}$ av rutene er blå.

(b) Helheten er et kvadrat. $\frac{1}{2}$ av kvadratet er rødt.

(c) Helheten er 5 kuler. $\frac{3}{5}$ av kulene er svarte.

Brøkdeler av tall

Si at rektangelet under har verdien 12.



Når vi sier " $\frac{2}{3}$ av 12" mener vi at vi skal

a) dele 12 inn i 3 like grupper.

b) finne ut hvor mye 2 av disse gruppene utgjør til sammen.

Vi har at

- a) 12 delt inn i 3 grupper er lik $12 : 3 = 4$.

$$\boxed{12} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

- b) 2 grupper som begge har verdi 4 blir til sammen $2 \cdot 4 = 8$.

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \boxed{8}$$

Altså er

$$\frac{2}{3} \text{ av } 12 = 8$$

For å finne $\frac{2}{3}$ av 12, delte vi 12 med 3, og ganget kvotienten med 2. Dette er det samme som å gange 12 med $\frac{2}{3}$ (se [MB](#)).

3.1 Brøkdelen av et tall

For å finne brøkdelen av et tall, ganger vi brøken med tallet.

$$\frac{a}{b} \text{ av } c = \frac{a}{b} \cdot c$$

Eksempel 1

Finn $\frac{2}{5}$ av 15.

Svar

$$\frac{2}{5} \text{ av } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$$

Eksempel 2

Finn $\frac{7}{9}$ av $\frac{5}{6}$.

Svar

$$\frac{7}{9} \text{ av } \frac{5}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{54}$$

Språkboksen

Deler av en helhet blir også kalt **andeler**.

3.2 Prosent

3.2.1 Prosenttall

Brøker er ypperlige til å oppgi andeler av en helhet fordi de gir et raskt bilde av hvor mye det er snakk om. For eksempel er det lett å se (omtrent) hvor mye $\frac{3}{5}$ eller $\frac{7}{12}$ av en kake er. Men ofte er det ønskelig å raskt avgjøre hvilke andeler som utgjør *mest*, og da er det best om brøkene har samme nevner.



Når andeler oppgis i det daglige, er det vanlig å bruke brøker med 100 i nevner. Slike brøker er så mye brukt at de har fått sitt eget navn og symbol.

3.2 Prosenttall

$$a\% = \frac{a}{100}$$

Språkboksen

% er symbolet for ordet **prosent**. Ordet kommer av det latinske *per centum*, som betyr *per hundre*.

Eksempel 1

$$43\% = \frac{43}{100}$$

Eksempel 2

$$12,7\% = \frac{12,7}{100}$$

Merk: Det er kanskje litt uvant, men ikke noe galt med å ha et desimaltall i teller (eller nevner).

Eksempel 3

Finn verdien til

- a) 12% b) 19,6% c) 149%

Svar

(Se MB for utregning som innebærer å dele med 100.)

$$\text{a) } 12\% = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$\text{b) } 19,6\% = \frac{19,6}{100} = 0,196$$

$$\text{c) } 149\% = \frac{149}{100} = 1,49$$

Eksempel 4

Gjør om brøkene til prosenttall.

$$\text{a) } \frac{34}{100} \quad \text{b) } \frac{203}{100}$$

Svar

$$\text{a) } \frac{34}{100} = 34\%$$

$$\text{b) } \frac{203}{100} = 203\%$$

Språkboksen

Verdien til et prosenttall kalles noen ganger **prosentfaktoren**.

Omgjøring av brøker til prosenttall

Alle brøker har en verdi, og alle verdier kan vi skrive om til en brøk med 100 i nevner. For eksempel er $890 = \frac{89\,000}{100}$ og $0,125 = \frac{12,5}{100}$ (forklar for deg selv hvorfor!). Dette kan vi utnytte for å skrive om brøker til prosenttall.

Eksempel 5

Gjør om tallene til prosenttall.

- a) 97 b) 0,45 c) $\frac{1}{8}$

Svar

$$\text{a) } 97 = \frac{9700}{100} = 9700\%$$

$$\text{b) } 0,45 = \frac{45}{100} = 45\%$$

$$\text{c) } \frac{1}{8} = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

Eksempel 6

Finn 50% av 800.

Svar

Av [regel 3.1](#) og [regel 3.2](#) har vi at

$$50\% \text{ av } 800 = \frac{50}{100} \cdot 800 = 400$$

Eksempel 7

Finn 2% av 7,4.

Svar

$$2\% \text{ av } 7,4 = \frac{2}{100} \cdot 7,4 = 0,148$$

Tips

Å dele med 100 er såpass enkelt, at vi gjerne kan uttrykke prosenttall som desimaltall når vi gjør utregninger. I *Eksempel 6* over kunne vi ha regnet slik:

$$2\% \text{ av } 7,4 = 0,02 \cdot 7,4 = 0,148$$

Promille

Noen ganger er det bedre å bruke brøker med 1000 i nevner for å oppgi andeler. Da brukes symbolet ‰, som uttales **promille**.

$$a\text{‰} = \frac{a}{1000}$$

Alle regler om prosentregning kan også brukes ved promilleregning så lenge man erstatter 100 med 1000.

3.2.2 Prosentdeler

Hvor mange prosent utgjør 15 av 20?

15 er det samme som $\frac{15}{20}$ av 20, så svaret på spørsmålet får vi ved å gjøre om $\frac{15}{20}$ til en brøk med 100 i nevner. Siden $20 \cdot \frac{100}{20} = 100$, utvider vi brøken vår med $\frac{100}{20} = 5$:

$$\frac{15 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{75}{100}$$

15 utgjør altså 75% av 20. Vi kunne fått 75 direkte ved utregningen

$$15 \cdot \frac{100}{20} = 75$$

3.3 Antall prosent a utgjør av b

$$\text{Antall prosent } a \text{ utgjør av } b = a \cdot \frac{100}{b} \quad (3.1)$$

Eksempel 1

Hvor mange prosent utgjør 340 av 400?

Svar $340 \cdot \frac{100}{400} = 85$

340 utgjør 85% av 400.

Eksempel 2

Hvor mange prosent utgjør 119 av 500?

Svar $119 \cdot \frac{100}{500} = 23,8$

119 utgjør 23,8% av 500.

Tips

Å gange med 100 er såpass enkelt å ta i hodet at man kan ta det bort fra selve utregningen. *Eksempel 2* over kunne vi da regnet slik:

$$\frac{119}{500} = 0,238$$

119 utgjør altså 23,8% av 500. (Her regner man i hodet at $0,238 \cdot 100 = 23,8$.)

3.2.3 Prosentvis endring; økning eller reduksjon

Økning

Med utsagnet "200 økt med 30%" menes dette:

200 addert med 30% av 200.

Altså er

$$\begin{aligned} 200 \text{ økt med } 30\% &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 + 60 \\ &= 260 \end{aligned}$$

I uttrykket over kan vi legge merke til at 200 er å finne i begge ledd, dette kan vi utnytte til å skrive

$$\begin{aligned} 200 \text{ økt med } 30\% &= 200 + 200 \cdot 30\% \\ &= 200 \cdot (1 + 30\%) \\ &= 200 \cdot (100\% + 30\%) \\ &= 200 \cdot 130\% \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$200 \text{ økt med } 30\% = 130\% \text{ av } 200$$

Reduksjon

Med utsagnet "200 redusert med 60%" menes dette:

200 minus 60% av 200

Altså er

$$\begin{aligned}
200 \text{ redusert med } 60\% &= 200 - 200 \cdot 60\% \\
&= 200 - 120 \\
&= 80
\end{aligned}$$

Også her legger vi merke til at 200 opptrer i begge ledd i utregningen:

$$\begin{aligned}
200 \text{ redusert med } 60\% &= 200 - 200 \cdot 60\% \\
&= 200 \cdot (1 - 60\%) \\
&= 200 \cdot 40\%
\end{aligned}$$

Dette betyr at

$$200 \text{ redusert med } 60\% = 40\% \text{ av } 200$$

Prosentvis endring oppsummert

3.4 Prosentvis endring

- Når en størrelse reduseres med $a\%$, ender vi opp med $(100\% - a\%)$ av størrelsen.
- Når en størrelse øker med $a\%$, ender vi opp med $(100\% + a\%)$ av størrelsen.

Eksempel 1

Hva er 210 redusert med 70%?

Svar

$100\% - 70\% = 30\%$, altså er

$$\begin{aligned}
210 \text{ redusert med } 70\% &= 30\% \text{ av } 210 \\
&= \frac{30}{100} \cdot 210 \\
&= 63
\end{aligned}$$

Eksempel 2

Hva er 208,9 økt med 124,5%?

Svar

$100\% + 124,5\% = 224,5\%$, altså er

$208,9$ økt med $124,5\% = 224,5\%$ av $208,9$

$$= \frac{224,5}{100} \cdot 208,9$$

Språkboksen

Rabatt er en pengesum som skal trekkes fra en pris når det gis tilbud. Dette kalles også et *avslag* på prisen. Rabatt oppgis enten i antall kroner eller som prosentdel av prisen.

Merverdiavgiften (mva.) er en avgift som legges til prisen på de aller fleste varer som selges. Merverdiavgift oppgis som regel som prosentdel av prisen.

Eksempel 3

I en butikk kostet en skjorte først 500 kr, men selges nå med 40% rabatt.

Hva er den nye prisen på skjorta?



Svar

(Vi tar ikke med kr i utregningene)

Skal vi betale full pris, må vi betale 100% av 500. Men får vi 40% i rabatt, skal vi bare betale $100\% - 40\% = 60\%$ av 500:

$$\begin{aligned} 60\% \text{ av } 500 &= \frac{60}{100} \cdot 500 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Med rabatt koster altså skjorta 300 kr.

Eksempel 4

På bildet står det at prisen på øreklokkene er 999,20 kr *ekskludert* mva. og 1 249 *inkludert* mva. For øreklokker er mva. 25% av prisen.

Undersøk om prisen der mva. er inkludert er rett.



Svar

(Vi tar ikke med 'kr' i utregningene)

Når vi inkluderer mva., må vi betale 100% + 25% av 999,20:

$$125\% \text{ av } 999,20 = \frac{125}{100} \cdot 999,20 = 1249$$

Altså 1249 kr, som også er opplyst på bildet.

3.2.4 Vekstfaktor

På side 57 økte vi 200 med 30%, og endte da opp med 130% av 200. Vi sier da at *vekstfaktoren* er 1,3. På side 57 reduserte vi 200 med 60%, og endte da opp med 40% av 200. Da er vekstfaktoren 0,40.

Mange stusser over at ordet vekstfaktor brukes selv om en størrelse *synker*, men slik er det. Kanskje et bedre ord ville være *endringsfaktor*?

3.5 Vekstfaktor I

Når en størrelse endres med $a\%$, er vekstfaktoren verdien til $100\% \pm a\%$.

Ved økning skal **+** brukes, ved reduisering skal **-** brukes.

Eksempel 1

En størrelse økes med 15%. Hva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% + 15\% = 115\%$, altså er vekstfaktoren 1,15.

Eksempel 2

En størrelse reduseres med 19,7%. Hva er vekstfaktoren?

Svar

$100\% - 19,7\% = 80,3\%$, altså er vekstfaktoren 0,803

La oss se tilbake til *Eksempel 1* på side 58, hvor 210 ble redusert med 70%. Da er vekstfaktoren 0,3. Videre er

$$0,3 \cdot 210 = 63$$

Altså, for å finne ut hvor mye 210 redusert med 70% er, kan vi gange 210 med vekstfaktoren (forklar for deg selv hvorfor!).

3.6 Prosentvis endring med vekstfaktor

endret originalverdi = vekstfaktor · originalverdi

Eksempel 1

En vare verd 1 000 kr er rabattert med 20%.

- Hva er vekstfaktoren?
- Finn den nye prisen.

Svar

- Siden det er 20% rabatt, må vi betale $100\% - 20\% = 80\%$ av originalprisen. Vekstfaktoren er derfor 0,8.
- Vi har at

$$0,8 \cdot 1000 = 800$$

Den nye prisen er altså 800 kr .

Eksempel 2

En sjokolade koster 9,80 kr, ekskludert mva. På matvarer er det 15% mva.

- Hva er vekstfaktoren for prisen på sjokoladen med mva. inkludert?
- Hva koster sjokoladen inkludert mva.?

Svar

- Med 15% i tillegg må vi betale $100\% + 15\% = 115\%$ av prisen ekskludert mva. Vekstfaktoren er derfor 1,15.
- Vi har at

$$1,15 \cdot 9,80 = 11,27$$

Sjokoladen koster 11,27 kr inkludert mva.

Vi kan også omskrive likningen¹ fra [regel 3.6](#) for å få et uttrykk for vekstfaktoren:

3.7 Vekstfaktor II

$$\text{vekstfaktor} = \frac{\text{endret originalverdi}}{\text{originalverdi}}$$

Å finne den prosentvise endringen

Når man skal finne en prosentvis endring, er det viktig å være klar over at det er snakk om prosent *av en helhet*, som er selve utgangspunktet for utregningene. Denne helheten er den originale verdien.

La oss som et eksempel si at Jakob tjente 10 000 kr i 2019, og 12 000 kr i 2020. Vi kan da stille spørsmålet ”Hvor mye endret lønnen til Jakob seg med fra 2019 til 2020, i prosent?”.

Spørsmålet tar utgangspunkt i lønnen fra 2019, dette betyr at 10 000 er vår originale verdi. To måter å finne den prosentvise endringen på er disse (vi tar ikke med ’kr’ i utregningene):

¹Se [kapittel 6](#) for hvordan skrive om likninger.

- (i) Lønnen til Jakob endret seg fra 10 000 til 12 000, en forandring på $12\,000 - 10\,000 = 2\,000$. Videre er (se [regel 3.3](#))

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2\,000 \text{ utgjør av } 10\,000 &= 2\,000 \cdot \frac{100}{10\,000} \\ &= 20\end{aligned}$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med 20%.

- (ii) Vi har at

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1,2$$

Fra 2019 til 2020 økte altså lønnen til Jakob med en vekstfaktor lik 1,2 (se [regel 3.6](#)). Denne vekstfaktoren tilsvarer en endring lik 20% (se [regel 3.5](#)). Det betyr at lønnen økte med 20%.

3.8 Prosentvis endring I

$$\text{prosentvis endring} = \frac{\text{endret originalverdi} - \text{originalverdi}}{\text{originalverdi}} \cdot 100$$

Hvis 'prosentvis endring' er et positivt/negativt tall, er det snakk om en prosentvis økning/reduksjon.

Kommentar

[regel 3.8](#) kan se litt voldsom ut, og er ikke nødvendigvis så lett å huske. Hvis du virkelig har forstått [delseksjon 3.2.3](#), kan du uten å bruke [regel 3.8](#) finne prosentvise endringer trinnvis. I påfølgende eksempel viser vi både en trinnvis løsningsmetode og en metode ved bruk av formel.

Eksempel 1

I 2019 hadde et fotballag 20 medlemmer. I 2020 hadde laget 12 medlemmer. Hvor mange prosent av medlemmene fra 2019 hadde sluttet i 2020?

Svar

Vi starter med å merke oss at det er medlemstallet fra 2019 som er originalverdien vår.

Metode 1; trinnvis metode

Fotballaget gikk fra å ha 20 til 12 medlemmer, altså var det $20 - 12 = 8$ som sluttet. Vi har at

$$\text{antall prosent 8 utgjør av } 20 = 8 \cdot \frac{100}{20} = 40$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Metode 2; formel

Vi har at

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= \frac{12 - 20}{20} \cdot 100 \\ &= -\frac{8}{20} \cdot 100 \\ &= -40\end{aligned}$$

I 2020 hadde altså 40% av medlemmene fra 2019 sluttet.

Merk: At medlemmer slutter, innebærer en *reduksjon* i medlemstall. Vi forventet derfor at 'prosentvis endring' skulle være et negativt tall.

3.9 Prosentvis endring II

$$\text{prosentvis endring} = 100 (\text{vekstfaktor} - 1)$$

Eksempel 1

I 2019 tjente du 12 000 kr og i 2020 tjente du 10 000 kr. Finn den prosentvise endringen i din inntekt, med inntekten i 2019 som utgangspunkt.

Svar

Her er 12 000 vår originalverdi. Av [regel 3.7](#) har vi da at

$$\begin{aligned}\text{vekstfaktor} &= \frac{10\,000}{12\,000} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{prosentvis endring} &= 100(0,8 - 1) \\ &= 100(-0,2) \\ &= -20\end{aligned}$$

Altså er lønnen *reduisert* med 20% i 2020 sammenliknet med lønnen i 2019.

Merk

[regel 3.8](#) og [regel 3.9](#) gir begge formler som kan brukes til å finne prosentvise endringer. Her er det opp til en selv å velge hvilken man liker best.

3.2.5 Prosentpoeng

Ofta snakker vi om mange størrelser samtidig, og når man da bruker prosent-ordet kan setninger bli veldig lange og knotete hvis man også snakker om forskjellige originalverdier (utgangspunkt). For å forenkle setningene, har vi begrepet *prosentpoeng*.



Tenk at et par solbriller først ble solgt med 30% rabatt av originalprisen, og etter det med 80% rabatt av originalprisen. Da sier vi at rabatten har økt med 50 *prosentpoeng*.

$$80\% - 30\% = 50\%$$

Hvorfor kan vi ikke si at rabatten har økt med 50%?

Tenk at solbrillene hadde originalpris 1 000 kr. 30% rabatt på 1 000 kr tilsvarer 300 kr i rabatt. 80% rabatt på 1000 kr tilsvarer 800 kr i rabatt. Men hvis vi øker 300 med 50%, får vi $300 \cdot 1,5 = 450$, og det er ikke det samme som 800! Saken er at vi har to forskjellige originalverdier som utgangspunkt:

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten 80%.”

Forklaring: ’Rabatten’ er en størrelse vi regner ut fra originalprisen til solbrillene. Når vi sier ”prosentpoeng”, viser vi til at **originalprisen fortsatt er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med $1\ 000\text{ kr} \cdot 0,3 = 300\text{ kr}$ i rabatt. Når vi legger til 50 prosentpoeng, legger vi til 50% av originalprisen, altså $1\ 000\text{ kr} \cdot 0,5 = 500\text{ kr}$. Totalt blir det 800 kr i rabatt, som utgjør 80% av originalprisen.

”Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble rabatten 45%.”

Forklaring: ’Rabatten’ er en størrelse vi regner ut fra originalprisen til solbrillene, men her viser vi til at **rabatten er utgangspunktet** for den kommende prosentregningen. Når prisen er 1 000 kr, starter vi med 300 kr i rabatt. Videre er

$$300\text{ kr økt med } 50\% = 300\text{ kr} \cdot 1,5 = 450\text{ kr}$$

og

$$\text{antall prosent } 450 \text{ utgjør av } 1\ 000 = \frac{450}{100} = 45$$

Altså er den nye rabatten 45%.

I de to (gule) tekstboksene over regnet vi ut den økte rabatten via originalprisen på solbrillene (1 000 kr). Dette er strengt tatt ikke nødvendig:

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50 prosentpoeng. Da ble rabatten

$$30\% + 50\% = 80\%$$

- Rabatten var først 30%, så økte rabatten med 50%. Da ble ra-

batten

$$30\% \cdot 1,5 = 45\%$$

3.10 Prosentpoeng

$a\%$ økt/reduisert med b prosentpoeng = $a\% \pm b\%$.

$a\%$ økt/reduisert med $b\%$ = $a\% \cdot (1 \pm b\%)$

Merk

Andre linje i [regel 3.10](#) er egentlig identisk med [regel 3.6](#).

Eksempel

I skole- og jobbsammenheng viser *fraværet* til hvor mange elever/ansatte som ikke er til stede.

En dag var 5% av elevene på en skole ikke til stede. Dagen etter var 7,5% av elevene ikke til stede.

- Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?
- Hvor mange prosent økte fraværet med?

Svar

- $7,5\% - 5\% = 2,5\%$, derfor har fraværet økt med 2,5 prosentpoeng.
- Her må vi svare på hvor mye endringen, altså 2,5%, utgjør av 5%. Av [regel 3.3](#) har vi at

$$\begin{aligned}\text{antall prosent } 2,5\% \text{ utgjør av } 5\% &= 2,5\% \cdot \frac{100}{5\%} \\ &= 50\end{aligned}$$

Altså har fraværet økt med 50%.

Merk

Å i *Eksempel 1* over stille spørsmålet "Hvor mange prosentpoeng økte fraværet med?", er det samme som å stille spørsmålet

”Hvor mange prosent av det totale elevantallet økte fraværet med?”

3.2.6 Gjentatt prosentvis endring

Hva om vi foretar en prosentvis endring gjentatte ganger? La oss som et eksempel starte med 2000, og utføre 10% økning 3 påfølgende ganger (se [regel 3.6](#)):

$$\text{verdi etter 1. endring} = \overbrace{2000}^{\text{originalverdi}} \cdot 1,10 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = \overbrace{2\,200}^{2\,200} \cdot 1,10 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = \overbrace{2\,420}^{2\,420} \cdot 1,10 = 2\,662$$

Mellomregningen vi gjorde over kan kanskje virke unødvendig, men utnytter vi skrivemåten for potenser¹ kommer et mønster til syne:

$$\text{verdi etter 1. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^1 = 2\,200$$

$$\text{verdi etter 2. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^2 = 2\,420$$

$$\text{verdi etter 3. endring} = 2\,000 \cdot 1,10^3 = 2\,662$$

3.11 Gjentatt vekst eller nedgang

$$\text{ny verdi} = \text{originalverdi} \cdot \text{vekstfaktor}^{\text{antall endringer}}$$

Eksempel 1

Finn den nye verdien når 20% økning utføres 6 påfølgende ganger med 10 000 som originalverdi.

Svar

20% = 0,2. Siden det er snakk om en økning er vekstfaktoren $1 + 0,2 = 1,2$. Da er

$$\text{ny verdi} = 10\,000 \cdot 1,2^6 = 29\,859,84$$

¹Se [MB](#), s.101

Eksempel 2

Marion har kjøpt seg en ny bil til en verdi av 300 000 kr, og hun forventer at verdien vil synke med 12% hvert år de neste fire årene. Hva er bilen da verd om fire år?

Svar

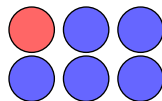
12% = 0,12. Siden det er snakk om en reduksjon, er vekstfaktoren $1 - 0,12 = 0,88$. Da er

$$\text{ny verdi} = 300\,000 \cdot 0,88^4 \approx 179\,909$$

Marion forventer altså at bilen er verdt ca. 179 909 kr om fire år.

3.3 Forhold

Med *forholdet* mellom to størrelser mener vi den ene størrelsen delt på den andre. Har vi for eksempel 1 rød kule og 5 blå kuler, sier vi at



$$\text{forholdet mellom antall røde kuler og antall blå kuler} = \frac{1}{5}$$

Forholdet kan vi også skrive som $1 : 5$. Verdien til dette regnestykket er

$$1 : 5 = 0,2$$

Om vi skriver forholdet som brøk eller som delestykke vil avhenge litt av oppgavene vi skal løse.

I denne sammenhengen kalles 0,2 **forholdstallet**.

3.12 Forhold

$$\text{forholdet mellom } a \text{ og } b = \frac{a}{b}$$

Verdien til brøken kalles forholdstallet.

Eksempel 1

I en klasse er det 10 håndballspillere og 5 fotballspillere.

- Finne forholdet mellom antall håndballspillere og fotballspillere. Finne også forholdstallet.
- Finne forholdet mellom antall fotballspillere og håndballspillere. Finne også forholdstallet.

Svar

- a) Forholdet mellom antall håndballspillere og fotballspillere er

$$\frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

Forholdstallet er 2.

- b) Forholdet mellom antall fotballspillere og håndballspillere er

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Forholdstallet er 0,5.

3.3.1 Målestokk

I MB (s.145 - 149) har vi sett på formlike trekanter. Prinsippet om at forholdet mellom samsvarende sider er det samme, kan utvides til å gjelde de fleste andre former, som f. eks. firkanter, sirkler, prismer, kuler osv. Dette er et fantastisk prinsipp som gjør at små tegninger eller figurer (modeller) kan gi oss informasjon om størrelsene til virkelige gjenstander. Tallet som gir oss denne informasjonen kalles **målestokken**.

3.13 Målestokk

$$\text{målestokk} = \frac{\text{en lengde i en modell}}{\text{den samsvarende lengden i virkeligheten}}$$

Eksempel 1

På en tegning av et hus er en vegg 6 cm. I virkeligheten er denne veggen 12 m.

Hva er målestokken på tegningen?

Svar

Først må vi passe på at lengdene har samme benevning¹. Vi gjør om 12 m til antall cm:

$$12 \text{ m} = 1\,200 \text{ cm}$$

Nå har vi at

$$\text{målestokk} = \frac{6 \text{ cm}}{1\,200 \text{ cm}} = \frac{6}{1\,200}$$

Vi bør også forkorte brøken så mye som mulig:

$$\text{målestokk} = \frac{1}{200}$$

¹Se seksjon 1.4.

Tips

Målestokk på kart er omtrent alltid gitt som en brøk med teller lik 1. I så fall kan man kan lage seg disse reglene:

$$\text{lengde i virkelighet} = \text{lengde på kart} \cdot \text{nevner til målestokk}$$

$$\text{lengde på kart} = \frac{\text{lengde i virkelighet}}{\text{nevner til målestokk}}$$

Eksempel 2

Kartet under har målestokk 1 : 25 000.

- Luftlinjen (den blå) mellom Helland og Vike er 10,4 cm på kartet. Hvor langt er det mellom Helland og Vike i virkeligheten?
- Tresfjordbrua er ca. 1300 m i virkeligheten. Hvor lang er Tresfjordbrua på kartet?



Svar

- a) Vi har at

$$\text{lengde i virkelighet} = 10,4 \text{ cm} \cdot 25\,000 = 260\,000 \text{ cm}$$

Altså er det 2,6 km mellom Helland og Vike.

- b) Vi har at

$$\text{lengde på kart} = \frac{1\,300 \text{ m}}{25\,000} = 0,052 \text{ m}$$

På kartet er altså Tresfjordbrua 5,2 cm.

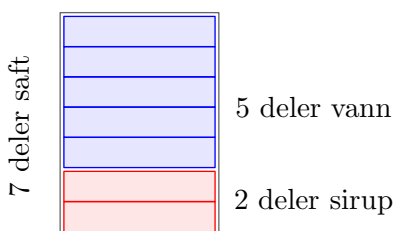
3.3.2 Blandingsforhold

I mange sammenhenger skal vi blande to sorter i riktig forhold.

På en flaske med solbærsirup kan du for eksempel lese symbolet "2 + 5", som betyr at man skal blande sirup og vann i forholdet 2 : 5. Heller vi 2 dL sirup i en kanne, må vi fylle på med 5 dL vann for å lage saften i rett forhold.

Blander du solbærsirup og vann, får du solbærsaft.

Noen ganger bryr vi oss ikke om *hvor mye* vi blander, så lenge forholdet er rett. For eksempel kan vi blande to fulle bøtter med solbærsirup med fem fulle bøtter vann, og fortsatt være sikre på at forholdet er riktig, selv om vi ikke vet hvor mange liter bøtta rommer. Når vi bare bryr oss om forholdet, bruker vi ordet *del*. "2 + 5" på sirupflasken leser vi da som "2 deler sirup på 5 deler vann". Dette betyr at saften vår i alt inneholder $2 + 5 = 7$ deler:



Dette betyr at 1 del utgjør $\frac{1}{7}$ av blandingen, sirupen utgjør $\frac{2}{7}$ av blandingen, og vannet utgjør $\frac{5}{7}$ av blandingen.

3.14 Deler i et forhold

En blanding med forholdet $a : b$ har til sammen $a + b$ deler.

- 1 del utgjør $\frac{1}{a+b}$ av blandingen.
- a utgjør $\frac{a}{a+b}$ av blandingen.
- b utgjør $\frac{b}{a+b}$ av blandingen.

Eksempel 1

Ei kanne som rommer 21 dL er fylt med en saft der sirup og vann er blandet i forholdet 2 : 5.

- a) Hvor mye vann er det i kanna?
b) Hvor mye sirup er det i kanna?

Svar

a) Til sammen består saften av $2 + 5 = 7$ deler. Da 5 av disse er vann, må vi ha at

$$\begin{aligned}\text{mengde vann} &= \frac{5}{7} \text{ av } 21 \text{ dL} \\ &= \frac{5 \cdot 21}{7} \text{ dL} \\ &= 15 \text{ dL}\end{aligned}$$

b) Vi kan løse denne oppgaven på samme måte som oppgave a), men det er raskere å merke seg at hvis vi har 15 dL vann av i alt 21 dL, må vi ha $(21 - 15) \text{ dL} = 6 \text{ dL}$ sirup.

Eksempel 2

I et malerspann er grønn og rød maling blandet i forholdet 3 : 7, og det er 5 L av denne blandingen. Du ønsker å gjøre om forholdet til 3 : 11.

Hvor mye rød maling må du helle oppi spannet?

Svar

I spannet har vi $3 + 7 = 10$ deler. Siden det er 5 L i alt, må vi ha at

$$\begin{aligned} 1 \text{ del} &= \frac{1}{10} \text{ av } 5 \text{ L} \\ &= \frac{1 \cdot 5}{10} \text{ L} \\ &= 0,5 \text{ L} \end{aligned}$$

Når vi har 7 deler rødmaling, men ønsker 11, må vi blande oppi 4 deler til. Da trenger vi

$$4 \cdot 0,5 \text{ L} = 2 \text{ L}$$

Vi må helle oppi 2 L rødmaling for å få forholdet 3 : 11.

Eksempel 3

I en ferdig blandet saft er forholdet mellom sirup og vann 3 : 5.

Hvor mange deler saft og/eller vann må du legge til for at forholdet skal bli 1 : 4?

Svar

Brøken vi ønsker, $\frac{1}{4}$, kan vi skrive om til en brøk med samme teller som brøken vi har (altså $\frac{3}{5}$):

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

I vårt opprinnelige forhold har vi 3 deler sirup og 5 deler vann. Skal dette gjøres om til 3 deler sirup og 12 deler vann, må vi legge til 7 deler vann.

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Finn

- a) $\frac{2}{3}$ av 9. b) $\frac{5}{8}$ av 24. c) $\frac{7}{2}$ av 12. d) $\frac{10}{4}$ av 32.

3.1.2

- a) Finn $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$.
b) Finn $\frac{6}{7}$ av $\frac{8}{11}$.
c) Finn $\frac{9}{10}$ av $\frac{2}{13}$.

3.1.3

Du har startet et firma i lag med en venn, og dere har blitt enige om at du skal få $\frac{3}{5}$ av det firmaet tjener. Hvis firmaet tjener 600 000 kr, hvor mange kroner får du?

3.2.1

Skriv om brøkene til prosenttall

- a) $\frac{78}{100}$ b) $\frac{91,2}{100}$ c) $\frac{0,7}{100}$ d) $\frac{193,54}{100}$

3.2.2

Skriv verdien til

- a) 57% b) 98,1% c) 219% d) 0,3%

3.2.3

Skriv om brøken til prosenttall

- a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{11}{50}$ c) $\frac{9}{25}$ d) $\frac{29}{20}$

3.2.4

Finn

- a) 20% av 500. b) 25% av 1000. c) 70% av 90.
c) 80% av 700. d) 15% av 200.

3.2.5

Hvor mange prosent utgjør

- a) 4 av 10? b) 6 av 24? c) 21 av 49? d) 18 av 81?

3.2.6

Se tilbake til *Undersøkelse 2* på s. 23 og 27.

- a) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "tiger"?
b) Hvor mange prosent av det totale antallet har svart "løve"?
c) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "krokodille"?
d) Hvor mange grader utgjør sektoren som representerer "hund"?

3.2.7

- a) Hva er 40 økt med 10%?
b) Hva er 250 økt med 30%?
c) Hva er 560 økt med 80%?
d) Hva er 320 økt med 100%?
e) Hva er 800 økt med 150%?

3.2.8

- a) Hva er 40 senket med 10%?
b) Hva er 250 senket med 30%?
c) Hva er 560 senket med 80%?

3.2.9

Du kjøper en kryptovaluta for 20 000 kr, og håper at verdien til denne vil stige med 8% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.10

Du kjøper en ny gaming-PC til 20 000 kr, og regner med at verdien til denne vil synke med 12% i løpet av et år. Hvor mye er den i så fall verd da?

3.2.11

Si at originalprisen på en bukse er 500 kr. Først ble det gitt 20% rabatt på originalprisen, men etter en stund ble det gitt 30% rabatt på originalprisen. Avgjør hvilke av utsagnene under som er sann/ikke sann

- (i) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, ble originalprisen redusert med 10%.
- (ii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10%.
- (iii) Når rabatten gikk fra å være 20% til å være 30%, økte rabatten med 10 prosentpoeng.

3.2.12 (1PV21D1)

Marko har kjøpt en sjokoladeplate i en butikk. Den kostet 20 kroner.

Mari har kjøpt en sjokoladeplate på ein bensinstasjon. Den kostet 50 kroner.

Hans: "Jeg har regnet og funnet ut at sjokoladeplaten er 150 % dyrere på bensinstasjonen enn i butikken."

Mari: "Jg har regnet og funnet ut at sjokoladeplaten er 60 % billigere i butikken enn på bensinstasjonen."

Marko: "Kan vi ha regnet rett? Hvorfor får vi ulike prosenter? Det var rart."

Gjør beregninger og svar på Marko sine spørsmål.

3.3.1

- a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7a).
- b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7b).
- c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.7c).

3.3.2

- a) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8a).
- b) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8b).

c) Finn vekstfaktoren fra oppgave 3.2.8c).

3.3.3

Finn forholdet og forholdstallet mellom antall hester og antall griser når vi har:

a) 5 hester og 2 griser. **b)** 12 griser og 4 hester.

3.3.4

Totaktsmotorer krever som regel bensin som er tilsatt en viss mengde motorolje. STIHL er en produsent av motorsager drevet av slike motorer, på deres hjemmesider kan vi lese dette:



Vi anbefaler følgende blandingsforhold:

Ved STIHL 1 : 50-totaktsmotorolje:

1 : 50 => 1 del olje + 50 deler bensin

Si at vi skal fylle på 2,5l bensin på motorsagen vår, hvor mye olje må vi da tilsette?

3.3.5

Du skal lage et lotteri der forholdet mellom antall vinnerlodd og taperlodd er $\frac{1}{8}$. Hvor mange taperlodd må du lage hvis du skal ha 160 vinnerlodd?

3.3.6

De fleste brus inneholder ca 10 g karbohydrater per 100 g. En type saftsirup inneholder 44 g karbohydrater per 100 g. Saften skal lages med 2 deler sirup og 9 deler vann.

Hvor mange karbohydrater per 100 g inneholder ferdig utblandet saft?

Merk: I denne oppgaven går vi ut ifra at både 1 dl vann og 1 dl saftsirup veier 100 g.

Gruble 5

(1PH23D1)

Ni av ti nordmenn bruker sosiale medier 88% av nordmenn bruker sosiale medier. De siste fem årene har antall nordmenn som bruker sosiale medier, økt med 8 prosentpoeng.

Opplysningene ovenfor er hentet fra ssb.no.

Vil du si at overskriften samsvarer med første setning i teksten?
Begrunn svaret ditt.

Hvor mange prosent tilsvare økningen på 8 prosentpoeng?

Gruble 6

Bruk [regel 3.7](#) og [regel 3.8](#) til å utlede formelen i [regel 3.9](#).

Kapittel 4

Økonomi

4.1 Indeksregning

4.1.1 Introduksjon

Innen økonomi er *indekser* forholdstall som forteller hvor mye størrelser har forandret seg. For eksempel kostet kornen ca 0,75 kr (!) da den ble lansert i 1953, mens den i 2021 kostet ca 27 kr. Forholdet mellom prisen i 2021 og i 1953 er da

$$\frac{\text{pris 2021}}{\text{pris 1953}} = \frac{27}{0,75} = 36$$



I denne sammenhengen er tallet 36 en indeks for prisendringen på korn mellom 1953 og 2021.

4.1.2 Konsumprisindeks og basisår

Konsumprisindeksen (KPI) er en indeks som beskriver et sammenlignbart prisnivå på varer og tjenester som en typisk husstand i Norge bruker penger på i løpet av et år. Disse varene er

- Matvarer og alkoholfrie drikkevarer
- Alkoholholdige drikkevarer og tobakk
- Klær og skotøy
- Bolig, lys og brensel
- Møbler, husholdningsartikler og vedlikehold av innbo
- Helsepleie
- Transport
- Post- og teletjenester
- Kultur og fritid
- Utdanning
- Hotell- og restauranttjenester
- Elektrisitet

For å sammenligne noe må man alltid ha et utgangspunkt, og konsumprisindeksen tar utgangspunkt i prisnivået på de nevnte varene/tjenestene i året 2015. 2015 kalles da *basisåret*¹, og i dette året er indeksen satt til 100.

¹Hvilket år som er basisår forandrer seg med tiden. Forrige basisår var 1998.

4.1 Basisår

I et basisår er verdien til indeksen 100. For konsumprisindeksen er 2015 basisåret.

Tabellen under viser samlet KPI i perioden 2011-2020:

År	KPI
2020	112,2
2019	110,8
2018	112,2
2017	105,5
2016	103,6
2015	100
2014	97,9
2013	95,9
2012	93,9
2011	93,3

Table 4.1: Kunsumprisindeksen for årene 2011-2020. Tall hentet fra [SSB](#).

Av tabellen kan vi for eksempel lese dette:

- Da KPI for 2017 er 105,5, har prisene steget med 5,5% siden 2015.
- Da KPI i 2011 er 93,3, var prisene 6,7% lavere i 2011 enn i 2015.

4.2 Prosentvis endring fra basisår

$$\text{indeks} - 100 = \text{prosentvis endring fra basisår}$$

Eksempel 1

I juli 2021 var KPI for matvarer 109,4. Hvor mye har prisen på matvarer endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$109,4 - 100 = 9,4$. Prisen på matvarer har altså økt med 9,4% sammenlignet med basisåret.

Eksempel 2

I juli 2021 var KPI for sko 98,0. Hvor mye har prisen på sko endret seg sammenlignet med basisåret?

Svar

$98,0 - 100 = -2$. Prisen på sko har altså blitt redusert med 2% sammenlignet med basisåret.

4.1.3 Kroneverdi

Vi har nevnt at en kroneis kostet 0,75 kr i 1953 og 27 kr i 2021. Når vi ved to tidspunkt må betale *forskjellig* pris på den *samme* varen skyldes det ofte at *kroneverdien* har forandret seg; *1 kr i 1953 var mer verd enn 1 kr i 2021*.

Kroneverdien for et gitt år regnes ut fra KPI til basisåret (100):

4.3 Kroneverdi

$$\text{kronerverdi} = \frac{100}{\text{KPI}}$$

Merk

Kroneverdien for basisåret (2015) er 1.

Eksempel 1

KPI i 2012 var 93,9. Regn ut kroneverdien i 2012, og gi en tolkning av svaret.

Svar

$$\text{kronerverdi i 2012} = \frac{100}{93,9} \approx 1,06$$

Dette betyr at 1 kr i 2012 tilsvarer 1,06 kr i basisåret 2015.

Obs!

Ordet *kronerverdi* brukes også når man sammenlikner verdien av 1 kr opp mot verdien av utenlandsk valuta. Kroneverdi ut fra et basisår og kroneverdi ut fra en valuta er ikke det samme.

4.4 Realverdi

Realverdien til en pengesum er hvor mye en pengesum ville vært verd i basisåret.

$$\text{realverdi} = \text{opprinnelig verdi} \cdot \text{kroneverdi}$$

Eksempel

I 1928 var KPI 3,2 og i 2020 var KPI 112,2. Hva hadde størst realverdi, 10 000 kr i 1928 eller 350 000 kr i 2020?

Svar

Vi har at

$$\text{kroneverdi i 1928} = \frac{100}{3,2}$$

Altså er

$$\begin{aligned} \text{realverdien til 10 000 i 1928} &= 10\,000 \text{ kr} \cdot \frac{100}{3,2} \\ &= 312\,500 \text{ kr} \end{aligned}$$

Videre er

$$\text{kroneverdi i 2020} = \frac{100}{112,2}$$

Altså er

$$\begin{aligned} \text{realverdien til 350 000 i 2020} &= 350\,000 \cdot \frac{100}{112,2} \\ &\approx 311\,943 \text{ kr} \end{aligned}$$

Altså var 10 000 kr mer verd i 1928 enn det 350 000 kr var verd i 2020.

4.1.4 Reallønn og nominell lønn

Hvor god *råd* vi har avhenger av hvor mye vi tjener og hva prisnivået er. Tenk at du hadde en årslønn på 500 000 kr i både 2020 og i 2019. *Tabell 4.1* forteller oss da at du hadde du best råd i 2019, fordi da var prisnivået (KPI) lavere enn i 2020.

At prisnivået har blitt høyere er det samme som at kroneverdien har blitt lavere. Dette betyr igjen at hvis lønnen din var den samme i 2019

og 2020, er *realverdien* til lønnen din høyere i 2019 enn i 2020. Den opprinnelige lønnen og realverdien til lønnen er så mye brukt i statistikk at de har fått egne navn:

4.5 Reallønn og nominell lønn

Nominell lønn er lønn mottatt et gitt år.

Reallønnen er realverdien til den nominelle lønnen.

Eksempel

I 2016 tjente Per 450 000 kr, mens i 2012 tjente han 420 000 kr. I 2016 var $KPI = 103,6$, mens i 2012 var $KPI = 93,9$. I hvilket av disse årene hadde Per best råd?

Svar

For å finne ut hvilket av årene Per hadde best råd i, sjekker vi hvilket år han hadde høyest reallønn¹ (se [regel 4.4](#)):

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2016} &= 450\,000 \cdot \frac{100}{103,6} \text{ kr} \\ &\approx 434\,363 \text{ kr}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{reallønn i 2012} &= 420\,000 \cdot \frac{100}{93,9} \\ &\approx 447\,284 \text{ kr}\end{aligned}$$

Reallønnen til Per var altså høyest i 2012, derfor hadde han bedre råd da enn i 2016.

¹KPI-verdiene i utregningen henter vi fra *Tabell 1*.

4.6 Verdi som følger indeks

En verdi er sagt å ha *fulgt indeks* hvis verdi og indeks ved to tidspunkt er like.

$$\frac{\text{verdi ved tidspunkt 1}}{\text{indeks ved tidspunkt 1}} = \frac{\text{verdi ved tidspunkt 2}}{\text{indeks ved tidspunkt 2}}$$

Eksempel 1

Tabellen under viser en oversikt over prisen registrert i en butikk på to varer ved to forskjellige tidspunkt.

	2010	2020
sjokolade	11,00 kr	13,40 kr
brus	12,50 kr	19,00 kr

I 2010 var KPI 92,1 og i 2020 var KPI 112,1. Har prisen på noen av varene fulgt indeks?

Svar

Vi har at

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2010}^*}{\text{KPI i 2010}} = \frac{11}{92,1} \approx 0,119$$

$$\frac{\text{pris på sjokolade i 2020}^*}{\text{KPI i 2020}} = \frac{13,40}{112,1} \approx 0,119$$

Videre er

$$\frac{\text{pris på brus i 2010}^*}{\text{KPI i 2010}} = \frac{12,5}{92,1} \approx 0,136$$

$$\frac{\text{pris på brus i 2020}^*}{\text{KPI i 2020}} = \frac{19}{112,1} \approx 0,169$$

Altså er det rimelig å si at prisen for sjokolade har fulgt indeks, mens prisen for brus ikke har gjort det.

4.2 Lån og sparing

4.2.1 Lån

Noen ganger har vi ikke nok penger til å kjøpe det vi ønsker oss, og må derfor ta opp et lån fra en bank. Banken gir oss da en viss *lånesum* mot at vi betaler tilbake denne, og *renter*, i løpet av en bestemt tid. Det vanligste er at vi underveis betaler banken det som kalles *terminbeløp*, som på sin side består av *avdrag* og renter. Det vi til enhver tid skylder banken kaller vi *gjelden*.

Si at en bank låner oss 100 000 kr, som da er lånesummen. Lånet skal tilbakebetales i løpet av 5 år, med ett terminbeløp hvert år, og renten er 10%. Det finnes forskjellige måter å betale tilbake et lån på, men følgende vil som regel gjelde:

- **Summen av alle avdragene skal tilsvare lånesummen.**

For å gjøre det enkelt i vårt eksempel, bestemmer vi oss for å betale tilbake lånet med like avdrag hvert år. Siden 100 000 kr skal fordeles likt over 5 år, må det årlige avdraget bli $\frac{100\,000}{5}$ kr = 20 000 kr.

- **Det man betaler i avdrag skal trekkes fra gjelden.**

Startgjelden er 100 000 kr, men det første året betaler vi 20 000 kr i avdrag, og da blir gjelden 100 000 kr – 20 000 kr = 80 000 kr. Det andre året betaler vi nye 20 000 kr, og da blir gjelden 80 000 kr – 20 000 kr = 60 000 kr. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Renter skal beregnes av gjelden.**

Siden gjelden det første året er 100 000 kr, må vi betale 100 000 kr · 0,1 = 10 000 kr i renter. Siden gjelden det andre året er 80 000 kr må vi betale 80 000 kr · 0,1 = 8 000 kr i renter. Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Terminbeløpet er summen av avdraget og rentene.**

Av første og tredje punkt får vi at

	1. år	2. år
	20 000 kr + 10 000 kr	20 000 kr + 8 000 kr
Terminbeløp	=	=
	30 000 kr	28 000 kr

Og slik fortsetter det de neste tre årene.

- **Lånet er fullført når gjelden er lik 0 kr og alle renter er betalt.**

Hvis vi har betalt avdrag lik 20 000 kr i 5 år, er gjelden 0 kr. Har vi da betalt alle rentene også, er lånet fullført.

Merk: Du har alltid rett til å betale større avdrag enn det som først er avtalt. Betaler du hele gjelden vil lånet avsluttes så lenge eventuelle renter også er betalt.

Serielån og annuitetslån

To vanlige typer lån er *serielån* og *annuitetslån*. Lånet fra eksempelet vi akkurat har sett på er et serielån fordi avdragene er like store. Hvis terminbeløpene hadde vært like store, ville det isteden vært et annuitetslån. Hvis lånesum, rente og nedbetalingstid er lik, vil et serielån alltid medføre minst utgifter totalt sett. For privatpersoner er det likevel veldig populært å velge annuitetslån på grunn av at det er lettere å planlegge økonomien når man betaler det samme beløpet hver gang.

Kredittkort

Kredittkort er et betalingskort som er slik at hvis du f.eks. bruker kortet for å betale 10 000 kr, så låner du pengene fra banken.

Etter en tid som er avtalt med banken vil den kreve renter av gjelden din. Til hvilken tid du betaler denne gjelden

er delvis opp til deg selv, men generelt har kredittkort veldig høge renter, så det lureste er å betale før rentekravet har startet!



4.7 Lån

lånesum	Beløpet vi låner av banken.
gjeld	Det vi til enhver tid skylder banken.
rente	Prosentandel av gjeld som skal betales.
avdrag	Det vi betaler ned på gjelden. Summen av avdragene tilsvarer lånesummen. $\text{ny gjeld} = \text{gammel gjeld} - \text{avdrag}$
renter	$\text{gjeld} \cdot \text{rente}$
terminbeløp	$\text{avdrag} + \text{renter}$
serielån	Lån hvor avdragene er like store.
annuitetslån	Lån hvor terminbeløpene er like store.
kredittkort	Betalingskort som oppretter et lån fra banken.

Eksempel 1

Fra en bank låner du 300 000 kr med 3% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 5 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?
- b) Hva er gjelden din etter at du har betalt tredje terminbeløp?
- c) Hvor mye må du betale i renter ved fjerde terminbeløp?
- d) Hvor stort blir det fjerde terminbeløpet?

Svar

- a) Siden 300 000 kr skal betales over 5 år, blir det årlige avdraget

$$\frac{300\,000 \text{ kr}}{5} = 60\,000 \text{ kr}$$

- b) Når tredje terminbeløp er betalt, har du betalt tre avdrag. Det betyr at gjelden din er

$$\begin{aligned} 300\,000 - 60\,000 \cdot 3 &= 300\,000 - 180\,000 \\ &= 120\,000 \end{aligned}$$

Altså 120 000 kr.

- c) Ut fra oppgave b) vet vi at gjelden er 120 000 kr når fjerde terminbeløp skal betales. 3% av gjelden blir da

$$120\,000 \cdot 0,03 = 3\,600$$

Altså 3 600 kr.

- d) Terminbeløpet tilsvarer avdrag pluss renter. Ut fra oppgave a) og c) vet vi da at det fjerde terminbeløpet blir

$$60\,000 \text{ kr} + 3\,600 \text{ kr} = 63\,600 \text{ kr}$$

Eksempel 2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 6,4% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 5 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 24 000 kr.

Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

Svar

Det første året er gjelden 100 000 kr, i renter må du betale 6,4% av denne:

$$100\,000 \cdot 0,064 = 6\,400$$

Altså må du betale 6 400 kr i renter det første året.

Vi har at

$$\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\text{avdrag} &= \text{terminbeløp} - \text{renter} \\ &= 24\,000 \text{ kr} - 6\,400 \text{ kr} \\ &= 17\,600 \text{ kr}\end{aligned}$$

Altså må du betale 17 600 kr i avdrag det første året.

4.2.2 Sparing; innskuddsrente og forventet avkastning

Innskuddsrente

Vi har sett at vi må betale renter når vi låner penger av en bank, men hvis vi i stedet setter penger (gjør et innskudd) i en bank får vi renter:

4.8 Innskuddsrente

Innskuddsrente er en prosentvis økning av pengene du har i banken, gjentatt over faste tidsintervaller (månedlig, årlig o.l.)

Eksempel 1

Du setter inn 20 000 kr i en bank som gir 2% årlig sparerente. Hvor mye penger har du i banken etter 8 år?

Svar

For å beregne innskuddsrenter kan vi anvende [regel 3.11](#). Siden renten er 2%, er vekstfaktoren 1,02. Originalverdien er 20 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$20\,000 \cdot 1,02^8 \approx 23\,433$$

Du har altså ca. 23 433 kr i banken etter 8 år med sparing.

Forventet avkastning

En annen måte å spare penger på, er å investere i et aksjefond. Da vil man snakke om *forventet avkastning*:

4.9 Forventet avkastning

Forventet avkastning angir en *forventet* prosentvis økning av en investering, gjentatt over faste tidsintervaller.

Eksempel 1

Du investerer 15 000 i et aksjefond som forventer 5% årlig avkastning. Hvor mye penger er investeringen verd etter 8 år ved en slik avkastning?

Svar

Også for forventet avkastning kan vi bruke [regel 3.11](#). Vekstfaktoren er 1,05, originalverdien er 15 000 og antall endringer (tiden) er 8:

$$15\,000 \cdot 1,05^8 \approx 22\,162$$

Etter 8 år er det forventet at investeringen er verdt 22 162 kr.

Spare med innskuddsrente eller aksjefond?

Som regel er forventet avkastning på et aksjefond høyere enn innskuddsrenten du får i en bank, men ulempen er at forventet avkastning ikke gir noen garantier. Forventet avkastning oppgir bare økningen eksperter antar vil skje. Er du heldig blir økningen høyere, er du uheldig blir den lavere, og kan til og med føre til en *reduksjon* av investeringen din. I verste fall, rett nok i ekstremt sjeldne tilfeller, kan hele investeringen din ende opp med å bli verd 0 kr.

Innskuddsrenten kan også forandre seg noe med tiden, men den kan aldri føre til en reduksjon av investeringen din.

4.3 Skatt

Om du har en inntekt, må du som regel betale en del av disse pengene til staten. Disse pengene kalles *skatt* (og noen ganger *avgift*). Hensikten med skatt er at staten skal ha råd til å gi innbyggerne tilbud som skole, helsetjenester og mye mer. I dag blir skatten i stor grad beregnet av datasystemer, men det er ditt ansvar å sjekke at beregningene er riktige – og da er det viktig å forstå hvordan skattesystemet fungerer.

Obs!

I eksamensoppgaver og i virkeligheten vil du fort oppdage at skattesystemer er presentert på en litt annen måte enn i denne boka. Dette er blant annet fordi skattereglene kan forandre seg fra år til år, og i denne boka har vi tatt utgangspunkt i skattereglene for 2018. Det viktigste er ikke at du husker spesifikt disse reglene, men at du lærer deg hva som menes med begrepene **bruttolønn**, **fradrag**, **skattegrunnlag**, **trygdeavgift** og **nettolønn**.

4.3.1 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

De fleste må betale 23% av det som kalles *skattegrunnlaget*, som er *bruttolønnen* minus *fradrag*. Bruttolønnen er lønnen du mottar fra arbeidsgiver, mens fradrag kan være mye forskjellig. *Personfradrag* og *minstefradrag* er noe alle skattebetalere får, i tillegg kan man blant annet få fradrag hvis man betaler **fagforeningskontingent** eller har gitt penger til veldedige formål.

Skattegrunnlag kalles noen ganger *trekkgrunnlag*.

Fagforeningskontingent er det du betaler for å være med i en **fagforening**.

4.10 Bruttolønn, fradrag og skattegrunnlag

$$\begin{array}{r} \text{bruttolønn} \\ - \quad \text{fradrag} \\ \hline = \quad \text{skattegrunnlag} \end{array}$$

Eksempel

Bruttolønnen til Magnus er 500 000 kr. Han får 56 000 kr i personfradrag og 97 600 kr i minstefradrag, i tillegg betaler han 1 000 kr for årlig medlemskap i fagforeningen *Tekna*.

Hva må Magnus betale hvis han skatter 23% av skattegrunnlaget?

Svar

Vi starter med å regne ut skattegrunnlaget, som er bruttolønnen minus fradragene:

	500 000	bruttolønn*
–	56 000	personfradrag*
–	97 600	minstefradrag*
–	1 000	fagforeningskontingent*
=	345 400	skattegrunnlag*

23% av 345 000 = 79 350. Magnus må betale 79 350 kr i skatt.

4.3.2 Trygdeavgift

Alle lønsmottakere må også betale *trygdeavgift*. Dette er en inntekt staten bruker til å dekke [Folketrygden](#). Hva man må betale i trygdeavgift kommer an på hvor gammel du er og hvilken type inntekt du har, men her skal vi bare bry oss om det man må betale for lønn fra en arbeidsgiver. Da er trygdeavgiften avhengig av alderen:

4.11 Trygdeavgift

alder	trygdeavgift
17-69 år	8,2 %
under 17 år eller over 69 år	5,1%

Trygdeavgiften skal beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Jonas og bestemoren hans, Line, har begge 150 000 kr i lønn.
Jonas er 18 år og Line er 71 år.

- a) Hva må Jonas betale i trygdeavgift?
- b) Hva må Line betale i trygdeavgift?

Svar

a) Siden Jonas er mellom 17 år og 69 år, skal han betale 8,2% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,082 = 12\,300$$

Altså skal Jonas betale 12 300 kr i trygdeavgift. Siden Line er over 69 år, skal hun betale 5,1% trygdeavgift:

$$150\,000 \cdot 0,051 = 7\,650$$

Altså skal Line betale 7 650 kr i trygdeavgift.

4.3.3 Trinnskatt

Av lønnen din må du også betale en viss prosent av forskjellige intervall, dette kalles *trinnskatt*:

4.12 Trinnskatt

	Intervall	Skatt
Trinn 1	169 000 - 237 900 kr	1,4%
Trinn 2	237 900 - 598 050 kr	3,3%
Trinn 3	598 050 - 962 050 kr	12,4%
Trinn 4	Over 962 050 kr	15,4%

Trinnskatt beregnes av bruttolønnen.

Eksempel

Hvis du tjener 550 000 blir utregningen av trinnskatt slik:

Trinn 1	Da hele lønnen er over 237 900 kr, må du betale skatt av $(237\,900 - 169\,000)$ kr = 68 900 kr. Skatt for trinn 1 blir da $68\,900 \text{ kr} \cdot 0,014 \approx 965$ kr.
Trinn 2	Da 550 000 kr er over 237 900 kr, men under 598 050 kr, må du betale skatt av $(550\,000 - 237\,900)$ kr = 312 100 kr. Skatt for trinn 2 blir da $312\,100 \text{ kr} \cdot 0,033 \approx 10\,299$ kr.
Totalt	Totalt må du betale $965 \text{ kr} + 10\,299 \text{ kr} = 11\,264$ kr i trinnskatt.

4.3.4 Nettolønn

Det du sitter igjen med etter å ha betalt skatt, trygdeavgift og fagforeningskontingent kalles *nettolønnen*. Med tanke på de tre tidligere delseksjonene kan vi sett opp et regnestykke som dette:

4.13 Nettolønn

	Bruttolønn
–	Fagforeningskontingent
–	23% skatt
–	Trygdeavgift
–	Trinnskatt
<hr/>	<hr/>
=	Nettolønn

Eksempel

Emblas bruttolønn er 550 000 kr. Hun betaler 1500 kr i året for medlemskap i LO (Norges største fagforening) og har 409 900 kr som skattegrunnlag. Embla er 28 år.

Hva er nettolønnen til Embla?

Svar

	550 000	Bruttolønn
–	1 500	Fradrag for fagforening
–	94 277	23% av skattegrunnlaget
–	45 100	8,2% av bruttolønn
–	11 264	Total skatt for trinn 1 og 2
<hr/>	<hr/>	<hr/>
=	397 859	Nettolønn

(Den totale trinnskatten har vi hentet fra utregningen i *Eksempel 1* fra delseksjon 4.3.3.)

Embla har altså 397 859 kr i nettolønn.

4.4 Budsjett og regnskap

4.4.1 Budsjett

Når man skal planlegge økonomien sin, kan det være lurt å sette opp en oversikt over det man forventer av inntekter og utgifter. En slik oversikt kalles et *budsjett*. Når man regner ut hva inntekter minus utgifter er, finner man et *resultat*. Er tallet positivt går man med *overskudd*, er tallet negativt går man med *underskudd*.

Eksempel

Lisa vil lage en oversikt over sine månedlige inntekter og utgifter, og kommer fram til dette:

- Hun tar på seg kveldsvakter på et gamlehjem. Av dette forventer hun ca. 4 000 kr i nettolønn.
- Hun bruker ca. 4 500 kr i måneden på mat.
- Hun får 4 360 kr i borteboerstipend.
- Hun bruker ca. 1 200 kr på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et månedsbudsjett for Lisa.

Svar

	Budsjett
Inntekter	
Lønn	4 000
Stipend	4 360
<i>Sum</i>	8 360
Utgifter	
Mat	4 500
Klær, fritid o.l.	1 200
<i>Sum</i>	5 700
Resultat	2 660

Budsjettet viser at Lisa forventer 2 660 kr i overskudd.

4.4.2 Regnskap

I et budsjett fører man opp *forventede* inntekter og utgifter, mens i et *regnskap* fører man opp *faktiske* inntekter og utgifter. Forskjellen mellom budsjett og regnskap kalles *avviket*. For avviket er det vanlig at man for inntekter og resultat regner ut 'regnskap – budsjett', mens man for utgifter regner ut 'budsjett – regnskap'. Dette fordi vi ønsker positive tall hvis inntektene er større enn forventet, og negative tall hvis utgiftene er større enn forventet.

Eksempel

I eksempelet fra forrige delseksjon (4.4.1) satt vi opp et månedsbudsjett for Lisa. I mars viste det seg at dette ble de faktiske inntektene og utgiftene hennes:

- Hun fikk ikke jobbet så mye som hun hadde tenkt. Nettolønnen ble 3 500 kr.
- Hun brukte 4 200 kr i måneden på mat.
- Hun fikk 4 360 i borteboerstipend.
- I bursdagsgave fikk hun i alt 2 000 kr.
- Hun brukte ca. 3 600 på klær, fritidsaktiviteter o.l.

Sett opp et regnskap for Lisas mars måned.

Svar

	Budsjett	Regnskap	Avvik
Inntekter			
Lønn	4 000	3 500	–500
Stipend	4 360	4 360	0
Bursdagsgave	0	2 000	2 000
<i>Sum</i>	8 360	9 860	1 500
Utgifter			
Mat	4 500	4 200	300
Klær, fritid o.l.	1 200	3 600	–2 400
<i>Sum</i>	5 700	7 800	–2 100
Resultat	2 660	2 060	–600

Lisa gikk altså med 2 060 kr i overskudd, men 600 kr mindre enn forventet ut fra budsjettet.

Oppgaver for kapittel 4

Konsumprisinder¹

År	KPI		
2020	112,2	2008	88
2019	110,8	2007	84.8
2018	112,2	2006	84.2
2017	105,5	2005	82.3
2016	103,6	2004	81
2015	100	2003	80.7
2014	97,9	2002	78.7
2013	95,9	2001	77.7
2012	93,9	2000	75.5
2011	93,3	1999	73.2
2010	92.1	1998	71.5
2009	89.9	1997	69.9

¹Hentet fra ssb.no.

4.1.1

Regn ut kroneverdien i årene:

- a) 1998 b) 2014 c) 2017

4.1.2

I 2017 tjente Else 490 000 kr, mens hun i 2012 tjente 410 000 kr. I 2017 var KPI = 105,5, mens i 2012 var KPI = 93,9.

- a) Finn reallønnen til Else i 2017 og i 2012.
b) I hvilket av disse årene hadde Else best råd?

4.2.1

Fra en bank låner du 200 000 kr med 2% i årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et serielån med 10 årlige terminbeløp.

- a) Hva blir det årlige avdraget?
b) Hva er gjelden din etter at du har betalt sjettede terminbeløp?
c) Hvor mye må du betale i renter det sjuende terminbeløpet?

d) Hvor stort blir det sjuende terminbeløpet?

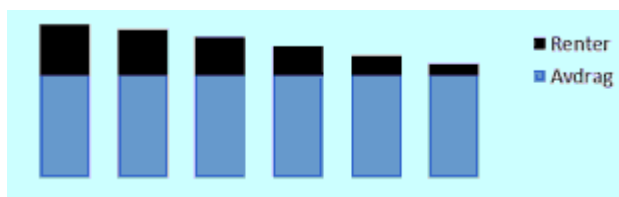
4.2.2

Fra en bank låner du 100 000 kr med 2% årlig rente. Lånet skal betales tilbake som et annuitetslån over 15 år, og banken har da regnet ut at terminbeløpet blir 7 783.

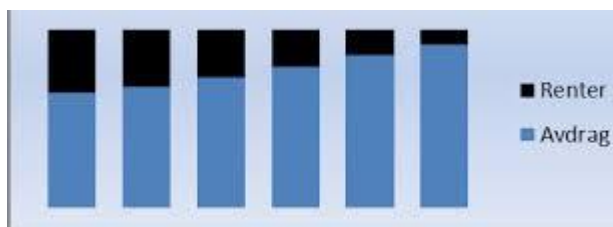
Regn ut avdrag og renter for det første terminbeløpet.

4.2.3

Hvilken av figurene skisserer et serielån og hvilken skisserer et annuitetslån? Forklar hvorfor.



(a)



(b)

4.2.4

Du oppretter en sparekonto i en bank som gir 2,3% årlig rente og setter inn 45 000 kr. Hvor mye har du på kontoen etter 15 år?

4.2.5 (1PV22D1)

Renten på et lån steg fra 2,0% til 2,2%.

a) Hvor mange prosentpoeng steg renta med?

b) Hvor mange prosent steg renta med?

4.2.6

Tenk at kredittkortet ditt har 45 dagers lån uten renter, og 10% månedlig rente etter dette. Du kjøper en scooter for 50 000 kr med kredittkortet. (Regn en måned som 30 dager.)

- a) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 75 dager?
- b) Hvor mye skylder du banken hvis ingenting er betalt innen 105 dager?
- c) Hvor mye skylder du banken etter 75 dager hvis du betalte 20 000 kr innen de første 45 dagene?

4.3.1

Børge har 350 000 kr i lønn. Børge er pensjonist, og skal da ha 56 000 kr i personfradrag og 83 000 kr i minstefradrag. I tillegg betaler han 700 kr i fagforeningskontigent.

- a) Beregn skattegrunnlaget til Børge.
- b) Av skattegrunnlaget betaler Børge 23% skatt. Finn hvor mye dette er.

4.3.2

Mira er 19 år og tjener 200 000 i året, mens 74 år gamle Børge tjener 350 000 i året.

Bestem hvor mye Mira og Børge hver for seg betaler i trygdeavgift.

4.3.3

Beregn trinnskatten til Børge (nevnt i [oppgave 4.3.1](#) og [oppgave 4.3.2](#)).

4.3.4

Beregn nettolønnen til Børge (nevnt i [oppgave 4.3.1](#) og [oppgave 4.3.3](#)).

4.4.1

I februar antok Nora at dette ville bli hennes utgifter og inntekter:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel

- 4 500 kr på mat
- 1 500 kr på andre utgifter

a) Sett opp et budsjett for Noras inntekter og utgifter i februar.

b) Det viste seg at de *faktiske* utgiftene og inntektene ble disse:

- 23 000 kr i nettolønn
- 6 000 kr for leie av hybel
- 5 500 på mat
- Kjøp av fire FLAX-lodd som kostet 25 kr hver.
- Gevinst på 1 000 kr fra FLAX-loddene
- 1 800 på andre utgifter.

Sett opp et regnskap for Nora. Gikk hun med overskudd eller underskudd i februar? Ble overskuddet/underskuddet større eller mindre enn i budsjettet?

Kapittel 5

Sannsynlighet

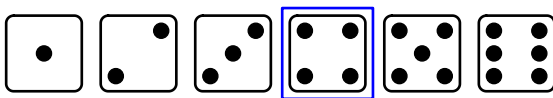
5.1 Grunnprinsippet

Selve prinsippet bak sannsynlighetsregning er at vi spør hvor mange *gunstige utfall* vi har i et utvalg av *mulige utfall*. Sannsynligheten for en *hendelse* er da gitt som et forholdstall mellom disse.

5.1 Sannsynligheten for en hendelse

$$\text{sannsynligheten for en hendelse} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}$$

Når vi kaster en terning, kaller vi 'å få en firer' en hendelse. Og da en terning har seks forskjellige sider, er det seks mulige utfall.



Hvis vi ønsker 'å få en firer', er det bare 1 av disse 6 utfallene som gir oss det vi ønsker, altså er

$$\text{sannsynlighet for å få en firer} = \frac{1}{6}$$

For å unngå lange uttrykk bruker vi gjerne enkeltbokstaver for å indikere en hendelse. I stedet for å skrive 'å få en firer', kan vi bruke bokstaven F , og for å indikere at vi snakker om sannsynligheten for en hendelse, bruker vi bokstaven P .

P kommer av det engelske ordet for sannsynlighet, *probability*.

Når vi skriver $P(F)$ betyr dette 'sannsynligheten for å få en firer':

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

Hva med det motsatte, altså sannsynligheten for å *ikke* få en firer? For å uttrykke at noe er motsatt av en hendelse, setter vi en strek over navnet. Hendelsen 'å ikke få en firer' skriver vi altså som \bar{F} . Det 'å ikke få en firer' er det samme som 'å få enten en ener, en toer, en treer, en femmer eller en sekser', derfor har denne hendelsen 5 gunstige utfall. Det betyr at

$$P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$$

5.2 Symboler for sannsynlighet

$P(A)$ er sannsynligheten for at hendelsen A skjer.

A og \bar{A} er motsatte hendelser.

$P(\bar{A})$ er sannsynligheten for at A ikke skjer, og omvendt.

Obs!

Som regel er det en god vane å forkorte brøker når det lar seg gjøre, men i sannsynlighetsregning vil det ofte lønne seg å la være. Du vil derfor oppdage at mange brøker i kommende seksjoner kunne vært forkortet.

5.2 Hendelser med og uten felles utfall

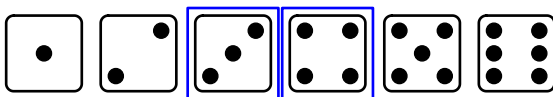
5.2.1 Hendelser uten felles utfall

La oss kalle hendelsen 'å få en treer' (på en terning) for T . Hendelsen 'å få en treer eller en firer' skriver vi da som $T \cup F$.

Symbolet \cup kalles *union*.

Det er 2 av 6 sider på en terning som er tre eller fire, sannsynligheten for 'å få en treer eller en firer' er derfor $\frac{2}{6}$:

$$P(T \cup F) = \frac{2}{6}$$



Det samme svaret får vi ved å legge sammen $P(T)$ og $P(F)$:

$$P(T \cup F) = P(T) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Å finne $P(T \cup F)$ ved å summere $P(T)$ og $P(F)$ kan vi gjøre da T og F ikke har noen *felles utfall*. Dette fordi ingen sider på terningen viser *både* en treer og en firer.

5.3 Hendelser uten felles utfall

For to hendelser A og B uten felles utfall, er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eksempel

Du trekker opp en kule fra en bolle hvor det ligger én rød, to blå og én grønn kule. Hva er sannsynligheten for at du trekker opp en rød *eller* en blå kule?

Svar

Vi kaller hendelsene 'å få en rød kule' for R og hendelsen 'å få en blå kule' for B .

- Det er i alt 4 mulige utfall (kuler).
- Siden alle kulene bare har én farge, er det ingen av hendelsene R og B som har felles utfall.
- Sannsynligheten for å trekke en rød kule er

$$P(R) = \frac{1}{4}$$

- Sannsynligheten for å trekke en blå kule er

$$P(B) = \frac{2}{4}$$

Sannsynligheten for å få en rød *eller* en blå kule er dermed

$$\begin{aligned} P(R \cup B) &= P(R) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5.2.2 Summen av alle sannsynligheter er 1

Tenk at vi kaster en terning og at vi holder både 'å få en firer' og 'å ikke få en firer' for gunstige hendelser. Vi har tidligere sett at $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{F}) = \frac{5}{6}$, og at F og \bar{F} ikke har felles utfall. Av [regel 5.3](#) har vi da at

$$\begin{aligned}P(F \cup \bar{F}) &= P(F) + P(\bar{F}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \\ &= 1\end{aligned}$$

Enten så skjer F , eller så skjer den ikke. Og skjer den ikke, så skjer \bar{F} . Hvis vi sier at *både* F og \bar{F} er gunstige hendelser, sier vi altså at alle mulige utfall er gunstige, og da gir [regel 5.1](#) en sannsynlighet lik 1.

5.4 Summen av alle sannsynligheter

Summen av sannsynlighetene for alle mulige hendelser er alltid lik 1.

En hendelse A og den motsatte hendelsen \bar{A} vil til sammen alltid utgjøre alle hendelser. Av [regel 5.4](#) har vi da at

$$\begin{aligned}P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A})\end{aligned}$$

5.5 Motsatte hendelser

For en hendelse A er

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Eksempel

I en klasse med 25 elever er det 12 jenter og 13 gutter. Én elev skal tilfeldig trekkes ut til å være med i en matematikkonkurranse.

- a) Hva er sannsynligheten for at en gutt blir trukket?
- b) Hva er sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket?

Svar

Vi kaller hendelsen 'en gutt blir trukket' for G .

- a) Sannsynligheten for at en gutt blir trukket er

$$P(G) = \frac{13}{25}$$

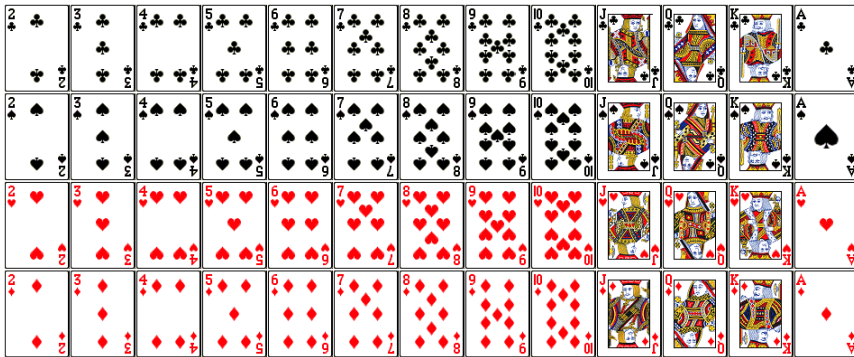
- b) Sannsynligheten for at en gutt *ikke* blir trukket er

$$\begin{aligned} P(\bar{G}) &= 1 - P(G) \\ &= 1 - \frac{13}{25} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Merk: At en gutt *ikke* blir trukket er det samme som at en jente blir trukket.

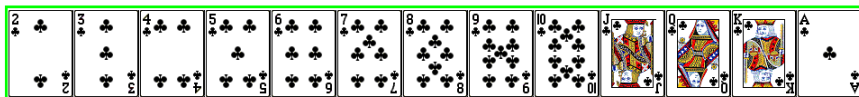
5.2.3 Felles utfall

Noen ganger er det slik at to hendelser kan ha *felles utfall*. La oss se på en vanlig kortstokk med 52 kort som er likt delt inn i typene spar, hjerter, ruter og kløver. Kort som er av sorten knekt, dame, konge eller ess kalles *honnørkort*.

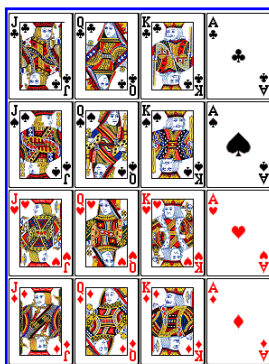


Tenk at vi trekker opp et kort fra en blandet kortstokk. Vi ønsker å finne sannsynligheten for 'å trekke kløverkort *eller* honnørkort'. Vi starter med å telle opp de gunstige utfallene for kløverkort, og finner at antallet er 13.

Et kort som kløver konge er et kløverkort, men det er også et honnørkort, og derfor er det begge deler; *både* kløverkort og honnørkort.



Etterpå teller vi opp gunstige utfall for honnørkort, og finner at antallet er 16.

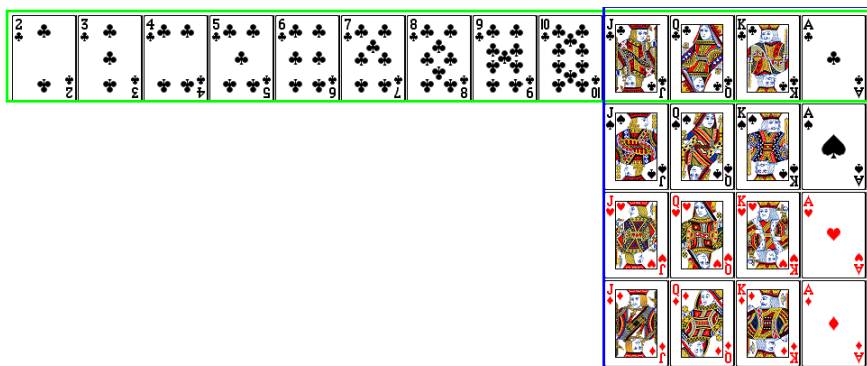


Til sammen har vi telt $13 + 16 = 29$ gunstige utfall, men nå støter vi på et problem. For da vi fant alle kløverkort, telte vi blant andre kløver knekt, dame, konge og ess. Disse fire kortene telte vi også da vi fant alle honnørkort, noe som betyr at vi har telt de samme kortene to ganger!



Det finnes jo for eksempel ikke to kløver ess i en kortstokk, så skal vi regne ut hvor mange kort som oppfyller kravet om å være kløver *eller* honnør, så må vi trekke ifra antallet kort vi har telt dobbelt:

$$13 + 16 - 4 = 25$$



La K være hendelsen 'å trekke et kløverkort' og H være hendelsen 'å trekke et honnørkort'. Siden det er 25 kort som er kløverkort *eller* honnørkort av i alt 52 kort, har vi at

$$P(K \cup H) = \frac{25}{52}$$

Siden vi har 13 kløverkort og 16 honnørkort, får vi videre at

$$P(K) = \frac{13}{52} \quad \text{og} \quad P(H) = \frac{16}{52}$$

Vi har sett at fire kort er *både* kløver og honnørkort, dette skriver vi som

Symbolet \cap kalles *snitt*.

$$K \cap H = 4$$

Vi sier da at K og H har 4 felles utfall. Videre er

$$P(K \cap H) = \frac{4}{52}$$

Nå som vi har funnet $P(K)$, $P(H)$ og $P(K \cup H)$ kan vi igjen finne $P(K \cap H)$ på følgende måte:

$$\begin{aligned} P(K \cup H) &= P(K) + P(H) - P(K \cap H) \\ &= \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} \\ &= \frac{25}{52} \end{aligned}$$

5.6 Hendelser med felles utfall

For to hendelser A og B er

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Merk

Hvis man anvender [regel 5.6](#) på to hendelser uten felles utfall, ender man opp med [regel 5.3](#).

Eksempel

I en klasse på 20 personer spiller 7 personer fotball og 10 personer spiller håndball. Av disse er det 4 som spiller både fotball og håndball. Om man trekker ut én person fra klassen, hva er sannsynligheten for at denne personen spiller fotball *eller* håndball?

Svar

Vi lar F være hendelsen 'spiller fotball' og H være hendelsen 'spiller håndball'.

- Sannsynligheten for at en person spiller fotball er

$$P(F) = \frac{7}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller håndball er

$$P(H) = \frac{10}{20}$$

- Sannsynligheten for at en person spiller *både* fotball og håndball er

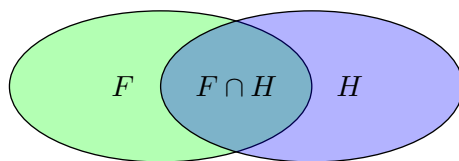
$$P(F \cap H) = \frac{4}{20}$$

Sannsynligheten for at en person spiller fotball *eller* håndball er derfor

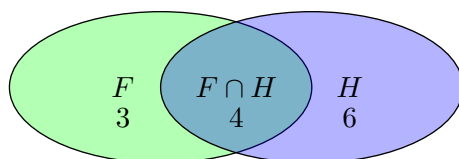
$$\begin{aligned} P(F \cup H) &= P(F) + P(H) - P(F \cap H) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{10}{20} - \frac{4}{20} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

5.2.4 Venndiagram

Målet med et venndiagram er å lage en figur som illustrerer antallet av de *særskilte* utfallene og de *felles* utfallene. La oss bruke eksempelet på side 121 til å lage en slik figur. For klassen der noen spiller fotball, noen håndball og noen begge deler, kan vi lage et venndiagram som vist under.



Den grønne ellipsen¹ representerer de som spiller fotball (F) og den blå de som spiller håndball (H). Da noen spiller *begge* sportene ($F \cap H$), har vi tegnet ellipsene litt over i hverandre. Videre vet vi at 7 spiller fotball, 10 spiller håndball og 4 av disse gjør *begge* deler. Dette illustreres slik:



Diagrammet forteller nå at 3 personer spiller *bare* fotball og 6 spiller *bare* håndball. I tillegg spiller 4 personer *både* fotball og håndball. (Til sammen er det derfor 7 som spiller fotball og 10 som spiller håndball.)

¹En ellipse er en "strekt" sirkel.

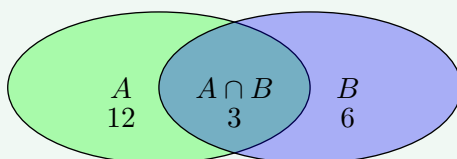
Eksempel 1

I en skoleklasse er det 31 elever. I denne klassen er det 15 elever som tar buss til skolen og 9 elever som tar båt. Av disse er det 3 stykker som tar både buss og båt.

- Sett opp et venndiagram som illustrerer gitt informasjon.
- Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen tar buss *eller* båt til skolen?

Svar

- Siden 3 elever tar *både* buss og båt, er det $15 - 3 = 12$ som *bare* tar buss og $9 - 3 = 6$ som *bare* tar båt. Vi lar A bety 'tar buss' og B bety 'tar båt', venndiagrammet vårt blir da seende slik ut:



- Sannsynligheten for at en person tar buss *eller* båt kan vi skrive som $P(A \cup B)$. Siden 15 elever tar buss, 9 tar båt og 3 tar begge deler, er det i alt $15 + 9 - 3 = 21$ elever som tar buss *eller* båt. Da det er 31 elever i alt å velge mellom, er

$$P(A \cup B) = \frac{21}{31}$$

Eksempel 2

Om en klasse med 29 elever vet vi følgende:

- 16 elever spiller fotball
- 12 elever spiller håndball
- 9 elever spiller volleyball
- 5 elever spiller både fotball og håndball, men ikke volleyball
- 3 elever spiller både fotball og volleyball, men ikke håndball
- 2 elever spiller både håndball og volleyball, men ikke fotball.
- 1 elev spiller alle tre sportene.

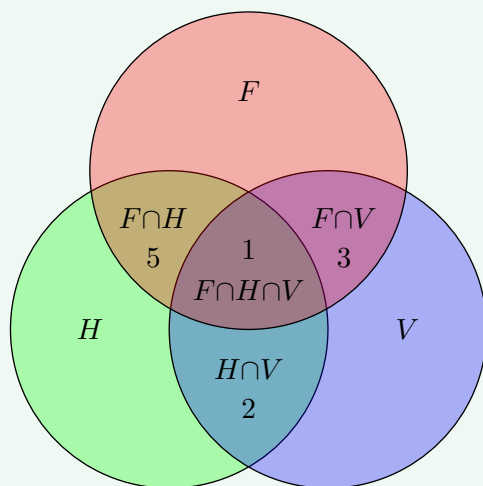
a) Sett opp et venndiagram som beskriver fordelingen av de tre sportene i klassen.

b) Én person trekkes tilfeldig ut av klassen. Hva er sannsynligheten for at denne personen spiller enten fotball, håndball eller volleyball?

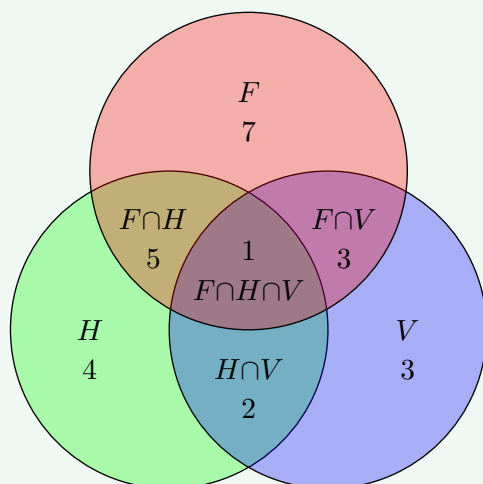
c) Personen som trekkes ut viser seg å spille fotball. Hva er sjansen for at denne personen også spiller håndball?

Svar

La F bety 'spiller fotball', H bety 'spiller håndball' og V bety 'spiller volleyball'. Når vi skal lage et venndiagram, er det lurt å skrive inn de felles utfallene først. Ut ifra fjerde til syvende punkt kan vi tegne dette:



Da ser vi videre at $16 - 5 - 1 - 3 = 7$ elever spiller *bare* fotball, $12 - 5 - 1 - 2 = 4$ spiller *bare* håndball og $9 - 3 - 1 - 2 = 3$ spiller *bare* volleyball:



b) Av diagrammet vårt ser vi at det er $7 + 5 + 1 + 3 + 4 + 2 + 3 = 25$ unike elever som spiller én eller flere av sportene. Sjansen for å trekke en av disse 25 i en klasse med 29 elever er $\frac{25}{29}$.

c) Vi leser av diagrammet at av de totalt 16 som spiller fotball, er det $5 + 1 = 6$ som også spiller håndball. Sjansen for at personen som er trukket ut spiller håndball er derfor $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

5.2.5 Krysstabell

Når det er snakk om to hendelser, kan vi også sette opp en *krysstabell* for å skaffe oss oversikt. Si at det på en skole med 300 elever deles ut melk og epler til de elevene som ønsker det i lunsjen. Si videre at 220 av elevene får melk, mens 250 får eple. Av disse er det 180 som får både melk og eple. Hvis vi lar M bety *får melk* og E bety *får eple*, vil krysstabellen vår først se slik ut:

	M	\bar{M}	sum
E			
\bar{E}			
sum			

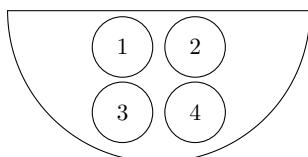
Så fyller vi inn tabellen ut ifra infoen vi har:

- får både melk og eple: $M \cap E = 180$
- får melk, men ikke eple: $M \cap \bar{E} = 220 - 180 = 40$
- får eple, men ikke melk: $E \cap \bar{M} = 250 - 180 = 70$
- får hverken melk eller eple: $\bar{M} \cap \bar{E} = 300 - 180 - 40 - 70 = 10$

	M	\bar{M}	sum
E	180	70	250
\bar{E}	40	10	50
sum	220	80	300

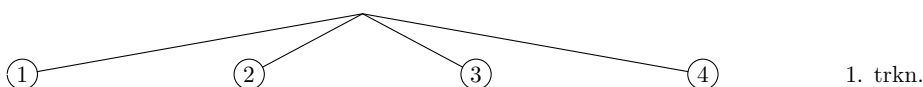
5.3 Gjentatte trekk

5.3.1 Permutasjoner

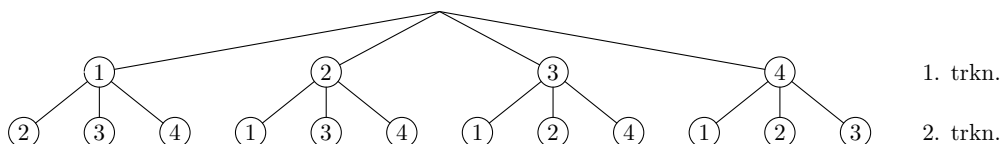


Si vi har en bolle med fire kuler som er nummererte fra 1 til 4. I et forsøk trekker vi opp en og en kule fram til vi har trukket opp tre kuler. Hvis vi for eksempel først trekker kule 2, deretter kule 4, og så kule 3, får vi *permutasjonen* 2 4 3.

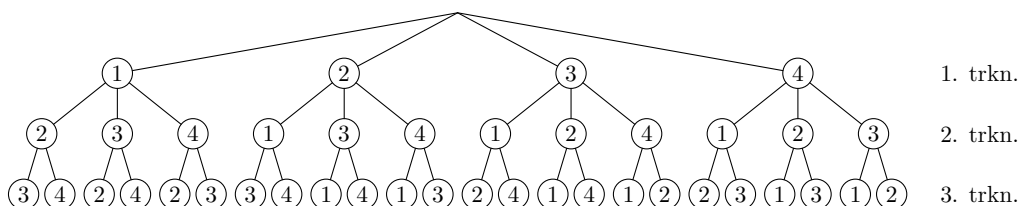
Hvor mange forskjellige permutasjoner kan vi få? La oss lage en figur som hjelper oss med å finne svaret. Ved første trekning er det 4 kuler å plukke av, vi kan derfor si at vi har 4 veier å gå. Enten trekker vi kule 1, eller kule 2, eller kule 3, eller kule 4:



Kula vi trekker opp, legger vi ut av bollen, og trekker så for andre gang. For hver av de 4 veiene vi kunne gå i første trekning får vi nå 3 nye veier å gå. Altså har vi nå $3 \cdot 4 = 12$ veier vi kan gå.



Den andre kula vi trekker opp legger vi også ut av bollen, så for hver av de 12 veiene fra 2. trekning, får vi nå to nye mulige veier å gå. Totalt antall veier (permutasjoner) blir derfor $12 \cdot 2 = 24$.



Denne utregningen kunne vi også ha skrevet slik:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

5.7 Produktregelen for permutasjoner

Når vi foretar flere trekninger etter hverandre, finner vi alle mulige permutasjoner ved å gange sammen antall mulige utfall i hver trekning.

Eksempel

Av de 29 bokstavene i alfabetet ønsker vi å lage et ord som består av 3 bokstaver. Vi godkjenner ord som ikke har noen betydning, men en bokstav kan bare brukes én gang i ordet.

Hvor mange ord kan vi lage?

Svar

Først har vi 29 bokstaver å trekke fra, deretter 28 bokstaver, og til slutt 27 bokstaver. Dermed er antall permutasjoner gitt som

$$\underbrace{29}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{1. trekning}}} \cdot \underbrace{28}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{2. trekning}}} \cdot \underbrace{27}_{\substack{\text{mulige utfall} \\ \text{3. trekning}}} = 21\,924$$

Vi kan altså lage 21 924 forskjellige ord.

Eksempel 2

Vi kaster om krone eller mynt fire ganger etter hverandre. Hvor mange permutasjoner har vi da?

Svar

Hver gang vi kaster om krone eller mynt, har vi to mulige utfall. Antall permutasjoner er derfor gitt som

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Kombinasjoner

I dagligtale blir ofte ordet *kombinasjoner* brukt istedenfor permutasjoner, men innenfor sannsynlighetsregning har kombinasjoner og permutasjoner forskjellig betydning. Den store forskjellen er at permutasjoner tar hensyn til rekkefølge, mens kombinasjoner ikke gjør det.

Si vi ønsker å sette sammen to bokstaver. Bokstavene vi bruker er A , B og C , og vi godtar gjenbruk av en bokstav. Da har vi 9 mulige permutasjoner:

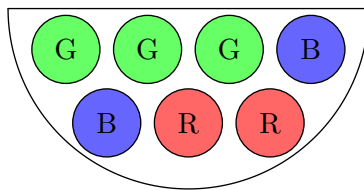
$$AA, AB, AC, BB, BA, BC, CC, CA, CB$$

Kombinasjoner derimot viser til en unik sammensetting når rekkefølge ikke tas hensyn til, for eksempel er AB og BA den samme kombinasjonen. I dette tilfellet har vi altså 6 kombinasjoner

$$AA, AB, AC, BB, BC, CC$$

5.3.2 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Tenk at vi har en bolle med sju kuler. Tre av dem er grønne, to er blå og to er røde. Si at vi tar opp først én kule av bollen, og deretter én til. Hva er sannsynligheten for at vi trekker opp to grønne kuler?



Hvis vi lar G bety 'å trekke en grønn kule', kan vi skrive denne sannsynligheten som $P(GG)$. For å komme fram til et svar, starter vi med å finne ut hvor mange *gunstige* permutasjoner vi har. Siden vi i første trekning har 3 gunstige utfall, og i andre trekning 2 gunstige utfall, har vi $3 \cdot 2 = 6$ gunstige permutasjoner. Totalt velger vi blant 7 kuler i første trekning og 6 kuler i andre trekning. Antall *mulige* permutasjoner er derfor $7 \cdot 6 = 42$. Sannsynligheten for å få to grønne kuler blir da

$$P(GG) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} \quad (5.1)$$

La oss også finne sannsynligheten for å få en grønn kule for hver trekning isolert sett. I første trekning har vi 3 grønne av i alt 7 kuler, altså er

$$P(G) = \frac{3}{7}$$

I andre trekning tas det for gitt at en grønn kule er plukket opp ved første trekning, og dermed er ute av bollen. Vi har da 2 av 6 kuler som er grønne:

$$P(G|G) = \frac{2}{6}$$

Symbolet $P(G|G)$ betyr *gitt at ... har skjedd*. $P(G|G)$ er derfor en forkortelse for 'sannsynligheten for å trekke en grønn kule, *gitt* at en grønn kule er trukket'.

Hvis vi ganger sannsynligheten fra første trekning med sannsynligheten fra andre trekning, blir regnestykket det samme som i ligning (5.1):

$$P(GG) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

5.8 Sannsynlighet ved gjentatte trekk

Sannsynligheten for at A vil skje, *gitt* at B har skjedd, skrives som $P(A|B)$.

Sannsynligheten for at A skjer først, deretter B , deretter C , og så videre (...) er

$$P(ABC\dots) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot \dots$$

Eksempel

I en bolle ligger to blå og to røde kuler. Vi trekker én og én kule opp av bollen, fram til vi har hentet opp tre kuler. Hva er sannsynligheten for at vi først trekker en blå, deretter en rød, og til slutt en blå kule?

Svar

Vi lar B bety 'å trekke blå kule' og R bety 'å trekke rød kule'. Sannsynligheten for først en blå, så en rød, og så en blå kule, skriver vi da som $P(BRB)$.

- Sannsynligheten for B i første trekning er $P(B) = \frac{2}{4}$.
- Sannsynligheten for R i andre trekning, *gitt* B i første er

$$P(R|B) = \frac{2}{3}$$

- Sannsynligheten for B i tredje trekning, *gitt* B i første og R i andre er

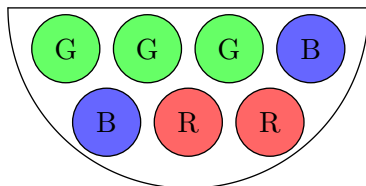
$$P(B|RB) = \frac{1}{2}$$

Altså har vi at

$$\begin{aligned} P(BRB) &= P(B) \cdot P(R|B) \cdot P(B|RB) \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{24} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

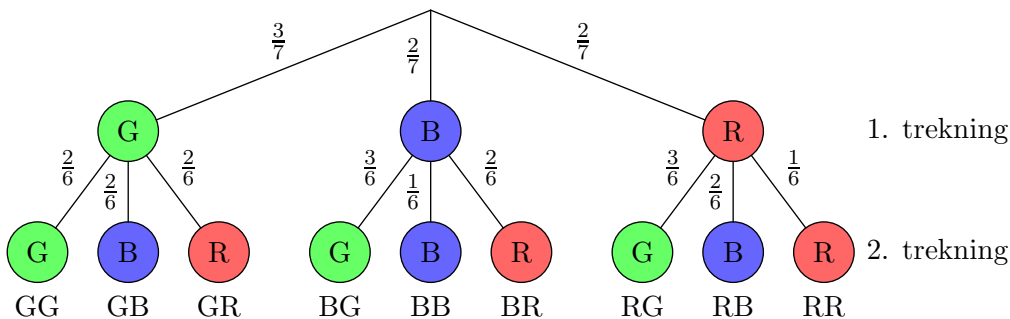
5.3.3 Valgtre

Vi kan utnytte [regel 5.8](#) for å lage en hjelpetegning når vi har å gjøre med gjentatte trekk. Tegningen vi her skal ende opp med kalles et *valgtre*. Vi tegner da en lignende figur som vi gjorde i delkapittel 5.3, men langs alle veier skriver vi på sannsynligheten for utfallet veien leder oss til.



La oss igjen se på bollen med de syv kulene. Trekk av grønn, blå eller rød kule betegner vi henholdsvis med bokstavene G , B og R .

Ved første trekning er sjansen for å trekke en grønn kule $\frac{3}{7}$, derfor skriver vi denne brøken på veien som fører oss til G . Gitt at vi har trukket en grønn kule, er sannsynligheten for også å trekke en grønn kule i andre trekning lik $\frac{2}{6}$. Denne brøken skriver vi derfor langs veien som fører oss fra G til G . Og sånn fortsetter vi til vi har ført opp alle sannsynlighetene til hver vei. For å få en rask oversikt over de forskjellige permutasjonene veiene fører til, kan det være lurt å skrive opp disse under hver ende av treet.



La oss nå bruke valgtreet over til å finne sannsynligheten for å trekke én grønn og én blå kule. GB og BG er da de gunstige permutasjonene. Ved å gange sammen sannsynlighetene langs veien til GB , finner vi at

$$P(GB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$$

På samme måte kan vi finne $P(BG)$:

$$P(BG) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{42}$$

Sannsynligheten for at 'GB eller BG' inntreffer er (se regel 5.6):

$$\begin{aligned}P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\ &= \frac{6}{42} + \frac{6}{42} \\ &= \frac{12}{42} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

5.9 Permutasjoner på et valgtre

For å finne sannsynlighetene til en permutasjon på et valgtre, ganger vi sammen sannsynlighetene langs veien vi må følge for å komme til permutasjonen.

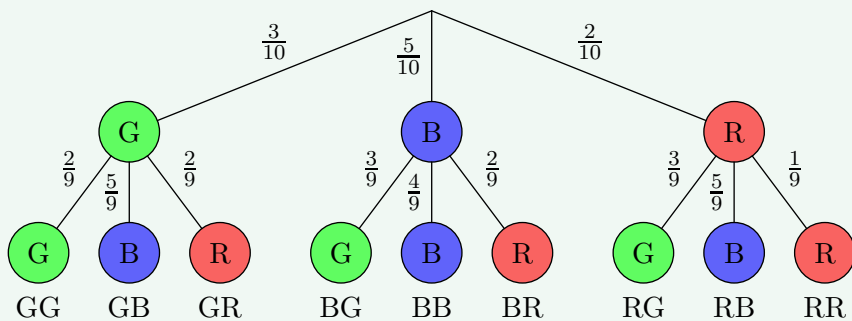
Eksempel

I en bolle med 10 kuler er tre kuler grønne, fem er blå og to er røde. Du trekker to kuler ut av bollen. La G , B og R henholdsvis bety 'å trekke en grønn kule', 'å trekke en blå kule', og 'å trekke en rød kule'.

- Tegn et valgtre som skisserer permutasjonene av B , G og R du kan få.
- Hva er sannsynligheten for at du trekker to røde kuler?
- Hva er sannsynligheten for at du trekker én blå og én grønn kule?
- Hva er sannsynligheten for at du trekker *minst* én blå *eller* én grønn kule?

Svar

a)



b) Av valgtreet vårt ser vi at

$$\begin{aligned}
 P(RR) &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \\
 &= \frac{2}{90} \\
 &= \frac{1}{45}
 \end{aligned}$$

c) Både permutasjonen GB og BG gir oss én blå og én grønn kule. Sannsynligheten for hver av dem er

$$\begin{aligned}
 P(GB) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \\
 &= \frac{15}{90} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(BG) &= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for GB eller BG er summen av $P(GB)$ og $P(BG)$:

$$\begin{aligned}
 P(GB \cup BG) &= P(GB) + P(BG) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

d) For å svare på denne oppgaven kan vi selvsagt legge sammen sannsynligheten for permutasjonene GG , GB , GR , BG , BB , BR , RG og RB , men vi sparer oss veldig mye arbeid hvis vi merker oss dette: Å få *minst* én blå eller én grønn kule er det motsatte av å *bare* få røde kuler. Sannsynligheten for dette, å få to røde kuler, fant vi i oppgave b). Av [regel 5.5](#) har vi at

$$\begin{aligned}P(\bar{R}\bar{R}) &= 1 - P(RR) \\&= 1 - \frac{1}{45} \\&= \frac{45}{45} - \frac{1}{45} \\&= \frac{44}{45}\end{aligned}$$

Sannsynligheten for å få *minst* én blå *eller* *minst* én grønn kule er altså $\frac{44}{45}$.

Oppgaver for kapittel 5

5.2.1

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort?
- Hva er sannsynligheten for at kortet er et kløverkort eller et sparkort?
- Hva er sannsynligheten for at kortet ikke er et kløverkort? Bruk to forskjellige regnemåter for å finne svaret.

5.2.2

Du trekker et kort fra en kortstokk.

- Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort?
- Hva er sannsynligheten for at du trekker et hjerterkort?
- Hva er sannsynligheten for at du trekker et 8-kort eller et hjerterkort?
- Hva er sannsynligheten for at kortet du trekker hverken er et 8-kort eller et hjerterkort?

5.2.3 (1PV21D2)

Scott har 6 hvite og 10 røde drops i en krukke. Han trekker tilfeldig to drops.

Vis at det er like stor sannsynlighet for at han trekker to drops av samme farge, som at han trekker to drops med ulik farge.

5.2.4 (1PV20D1)

Maria finner en gammel hengelås. Koden på hengelåsen består av tre tall. Hvert tall kan velges blant de hele tallene fra og med 0 til og med 9.

Bestem sannsynligheten for at koden begynner med 2 4 eller 4 2



5.2.5 (1PV17D1)

Ved en skole leser 80 % av elevene aviser på nett, 50% les erpapiraviser, og 2% leser ikke aviser.

a) Systematiser opplysningene gitt i teksten over i et venndiagram eller i en krysstabell.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev ved skolen leser både aviser på nett og papiraviser.

En elev ved skolen leser aviser på nett.

c) Bestem sannsynligheten for at denne eleven ikke leser papiraviser.

Kapittel 6

Ligninger, formler og funksjoner

6.1 Å finne størrelser

Ligninger, formler og funksjoner er begreper som dukker opp i forskjellige sammenhenger, men som i bunn og grunn handler om det samme; *de uttrykker relasjoner mellom størrelser*. De fleste regelboksene i denne boka inneholder en formel. For eksempel inneholder [regel 3.13](#) en formel for 'målestokk'. Når de andre størrelsene er gitt, kan vi sette disse inn i formelen for å finne 'målestokk'. Slik kan vi si at vi da finner 'målestokk' *direkte*. Har man gjort oppgaver tilknyttet de tidligere kapitlene, har man allerede øvd rikelig på det å finne størrelser *direkte*.

I denne seksjonen skal vi se på det å finne størrelser *indirekte*. Med det mener vi at minst én av følgende gjelder:

- Vi må løse en likning for å finne den ukjente størrelsen.
- Vi må ut fra en situasjonsbeskrivelse sette opp en formel som inneholder den ukjente størrelsen.

Merk

I denne seksjonen er det bare gitt eksempler, og ingen regler. Det er fordi vi bruker regler vi har sett på i kapitlene om ligninger og funksjoner i [MB](#). Forskjellen er bare at vi her ser på størrelser med benevning.

På side 12 så vi hvordan vi kan utføre utregninger uten å ta med benevningene til størrelsene. Det vil vi utelukkende gjøre i dette kapitlet, og derfor vil vi ikke her markere størrelser med *****.

Eksempel 1

For en taxi er det følgende kostnader:

- Du må betale 50 kr uansett hvor langt du blir kjørt.
 - I tillegg betaler du 15 kr for hver kilometer du blir kjørt.
- a) Sett opp et uttrykk for hvor mye taxituren koster for hver kilometer du blir kjørt.
- b) Hva koster en taxitur på 17 km?

Svar

- a) Her er det to ukjente størrelser; 'kostnaden for taxituren' og 'antall kilometer kjørt'. Relasjonen mellom dem er denne:

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot \text{antall kilometer kjørt}$$

- b) Vi har nå at

$$\text{kostnaden for taxituren} = 50 + 15 \cdot 17 = 305$$

Taxituren koster altså 305 kr.

Tips

Ved å la enkeltbokstaver representere størrelser, får man kortere uttrykk. La k stå for 'kostnad for taxituren' og x for 'antall kilometer kjørt'. Da blir uttrykket fra *Eksempel 1* over dette:

$$k = 50 + 15x$$

I tillegg kan man gjerne bruke skrivemåten for funksjoner:

$$k(x) = 50 + 15x$$

Eksempel 2

Tenk at klassen ønsker å dra på en klassetur som til sammen koster 11 000 kr. For å dekke utgiftene har dere allerede skaffet 2 000 kr, resten skal skaffes gjennom loddsalg. For hvert lodd som selges, tjener dere 25 kr.

- a) Lag en likning for hvor mange lodd klassen må selge for å få råd til klasseturen.
- b) Løs likningen.

Svar

- a) Vi starter med å tenke oss regnestykket i ord:

penger allerede skaffet + penger per lodd · antall lodd = prisen på turen

Den eneste størrelsen vi ikke vet om er 'antall lodd'. Vi erstatter¹ *antall lodd* med x , og setter verdiene til de andre

størrelsene inn i likningen:

$$2\,000 + 25 \cdot x = 11\,000$$

b)

$$\begin{aligned} 25x &= 11\,000 - 2\,000 \\ 25x &= 9\,000 \\ \frac{25x}{25} &= \frac{9\,000}{25} \\ x &= 360 \end{aligned}$$

¹ Dette gjør vi bare fordi det da blir mindre for oss å skrive.

Eksempel 3

En vennegjeng ønsker å spleise på en bil som koster 50 000 kr, men det er usikkert hvor mange personer som skal være med på å spleise.

- a) Kall 'antall personer som blir med på å spleise' for P og 'utgift per person' for U , og lag en formel for U .
- b) Finn utgiften per person hvis 20 personer blir med.

Svar

- a) Siden prisen på bilen skal deles på antall personer som er med i spleiselaget, må formelen bli

$$U = \frac{50\,000}{P}$$

- b) Vi erstatter P med 20, og får

$$U = \frac{50\,000}{20} = 2\,500$$

Utgiften per person er altså 2 500 kr.

Eksempel 4

Et sportsklubb planlegger en tur som krever bussreise. De får tilbud fra to busselskap:

- **Busselskap 1**
Klassen betaler 10 000 kr uansett, og 10 kr per km.
- **Busselskap 2**
Klassen betaler 4 000 kr uansett, og 30 kr per km.

For hvilken lengde kjørt tilbyr busselskapene samme pris?

Svar

Vi innfører følgende variabler:

- x = antall kilometer kjørt
- $f(x)$ = pris for Busselskap 1
- $g(x)$ = pris for Busselskap 2

Da er

$$f(x) = 10x + 10\,000$$

$$g(x) = 30x + 4\,000$$

Busselskapene har samme pris når

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 10x + 10\,000 &= 30x + 4\,000 \\ 6\,000 &= 20x \\ x &= 300 \end{aligned}$$

Busselskapene tilbyr altså samme pris hvis sportsklubben skal kjøre 300 km.

Eksempel 5

Ohms lov sier at strømmen I gjennom en metallisk leder (med konstant temperatur) er gitt ved formelen

$$I = \frac{U}{R}$$

hvor U er spenningen og R er resistansen.

- a) Skriv om formelen til en formel for R .

Strøm måles i Ampere (A), spenning i Volt (V) og motstand i Ohm (Ω).

- b) Hvis strømmen er 2 A og spenningen 12 V, hva er da resistansen?

Svar

- a) Vi gjør om formelen slik at R står alene på én side av likhetstegnet:

$$I \cdot R = \frac{U \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$I \cdot R = U$$

$$\frac{I \cdot R}{I} = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

- b) Vi bruker formelen vi fant i a), og får at

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{12}{2}$$

$$= 6$$

Resistansen er altså 6Ω .

Eksempel 6

Gitt en temperatur T_C målt i antall grader Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Temperaturen T_F målt i antall grader Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) er da gitt ved formelen

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

- Skriv om formelen til en formel for T_C .
- Hvis en temperatur er målt til 59°F , hva er da temperaturen målt i $^{\circ}\text{C}$?

Svar

- Vi isolerer T_C på én side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{9}{5} \cdot T_C + 32 \\ T_F - 32 &= \frac{9}{5} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{5}} \cdot T_C \\ 5(T_F - 32) &= 9T_C \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= \frac{9T_C}{9} \\ \frac{5(T_F - 32)}{9} &= T_C \end{aligned}$$

- Vi bruker formelen fra a), og finner at

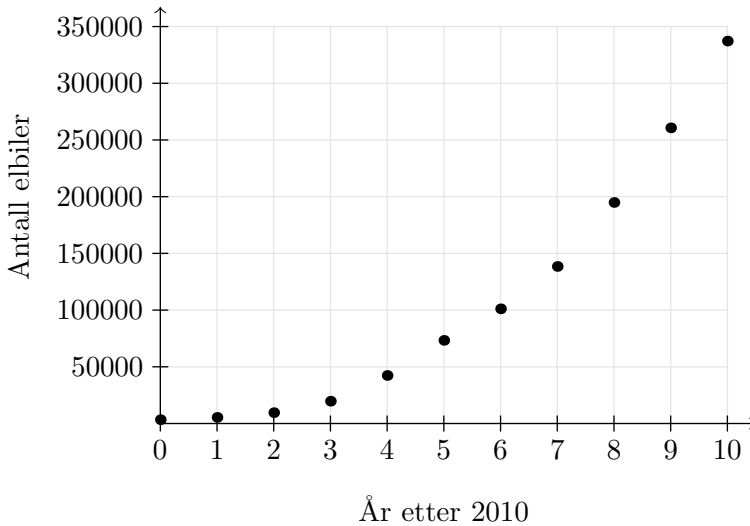
$$\begin{aligned} T_C &= \frac{5(59 - 32)}{9} \\ &= \frac{5(27)}{9} \\ &= 5 \cdot 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

59°F er altså det samme som 15°C .

6.2 Regresjon

Å forsøke å beskrive hvordan noe vil *utvikle* seg er en av de viktigste anvendelsene for funksjoner. Hvis vi har et datasett som beskriver tidligere hendelser, kan vi prøve å finne den funksjonen som passer best til datasettet. Dette kalles å utføre **regresjon**.

Grafen under viser¹ antall elbiler i Norge etter år 2010.

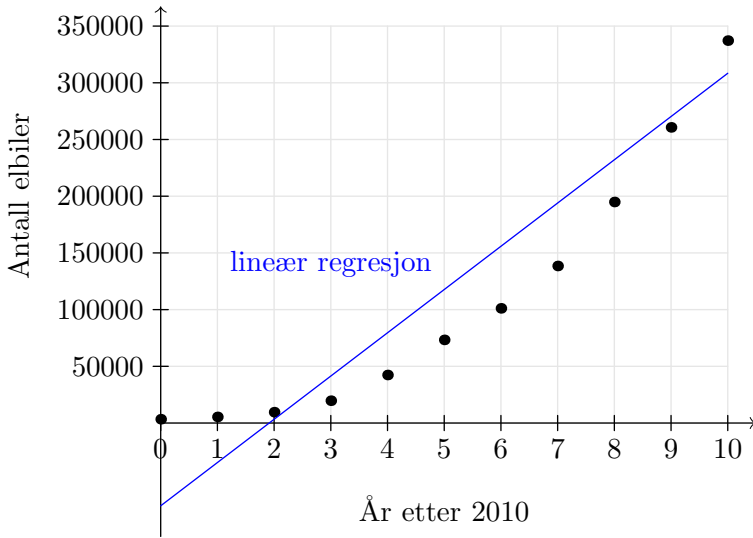


Vi ønsker nå å finne en funksjon som

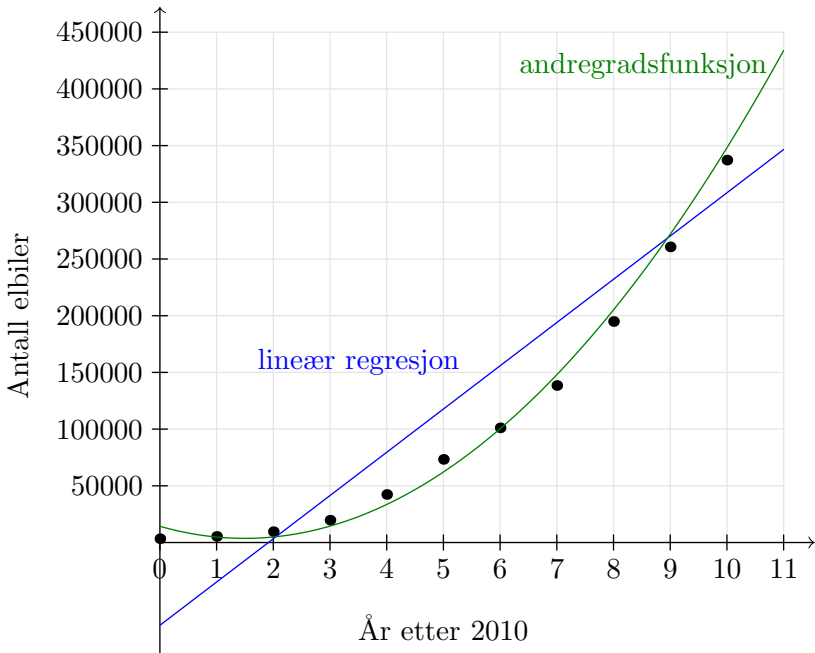
- (i) så godt som mulig skjærer hvert punkt.
- (ii) har en graf som passer til situasjonen vi modellerer.

Hvis vi utfører regresjon med en lineær funksjon i GeoGebra (se side ??), får vi denne grafen:

¹Tall hentet fra elbil.no



Utfører vi regresjon også med en andregradsfunksjon, får vi følgende resultat:

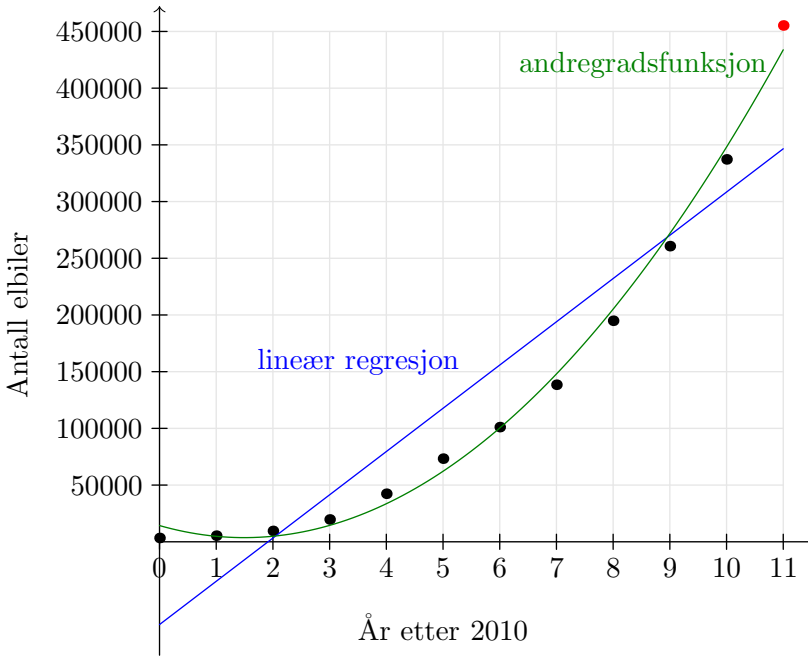


I figuren over kan vi merke oss at

- begge modellene (funksjonene) ”oppfører” seg feilaktig i starten. Den lineære funksjonen starter med et negativt antall biler, mens den kvadratiske funksjonen starter med at antallet synker fra år 0 til år 1.

- Grafen til den kvadratiske passer punktene mye bedre enn grafen til den lineære funksjonen.

Hvis vi hadde antatt at den lineære funksjonen ga en god beskrivelse av antallet elbiler fremover i tid, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var ca. 350 000. Hadde vi i stedet antatt det samme om den kvadratiske funksjonen, kunne vi lest av fra grafen at antall elbiler i 2021 var litt over 425 000. Fasit er at antall elbiler i 2021 var 455 271.



6.3 Vekstfart, fart og akselerasjon

6.1 Gjennomsnittlig og momentan vekstfart

Gitt en funksjon $f(x)$. Da har vi at

- stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ kalles den **gjennomsnittlige vekstfarten** til f på intervallet $[a, b]$.
- $f'(a)$ kalles den **momentane vekstfarten** til f i a .

En praktisk tolkning av begrepene

I MB har vi sett at stigningstallet til linja som går gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ er gitt ved uttrykket

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hvis vi antar at dette forholdet er konstant for $x \in [a, b]$, antar vi at f og x representerer proporsjonale størrelser på intervallet.

Hvis vi ser tilbake til (den alternative) definisjonen av den deriverte i TM1, innser vi at $f'(a)$ er den gjennomsnittlige vekstfaktoren til f på intervallet $[a, b]$ når $b \rightarrow a$. Da går $[a, b]$ mot å inneholde bare ett element, som er a .

Eksempel

Se for deg at vi slipper en ball fra 50 meter over bakken, og lar den falle fritt nedover. Når vi slipper ballen, starter vi også en stoppeklokke. Antall meter h ballen er over bakken etter t sekunder kan da tilnærmes ved funksjonen

$$h(t) = 5(10 - t^2) \quad , \quad t \in [0, \sqrt{10}]$$

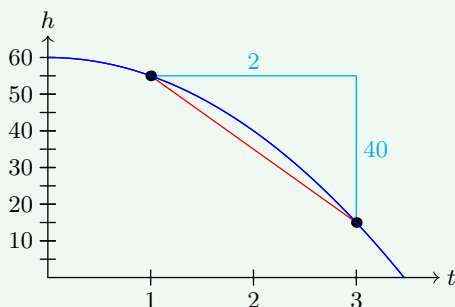
- Finns den gjennomsnittlige vekstfarten til h på intervallet $t \in [1, 3]$. Gi en praktisk tolkning av denne verdien.
- Finns den momentane vekstfarten til h i 3. Gi en praktisk tolkning av denne verdien.

Svar

- a) $h(1) = 5(10 - 1) = 45$ og $h(3) = 5(10 - 3^2) = 5$. Det betyr at stigningstallet til linja mellom $(1, h(1))$ og $(3, h(3))$ er

$$\frac{5 - 45}{3 - 1} = -20$$

Altså er vekstfarten til h på intervallet $[1, 3]$ lik -20 . Siden h representerer antall meter, og t representerer antall sekunder, representerer vekstfarten en størrelse med enheten 'm/s'. Dette er en enhet for fart. Hvis ballen skulle falt 40 meter *nedover* i løpet av 2 sekunder med konstant fart, måtte denne farten vært 20 m/s.



- b) Siden $h'(t) = -10t$, er $h'(3) = -30$. Dette betyr at etter å ha falt i 3 sekunder, har ballen oppnådd farten 30 m/s, i retning *nedover*.

6.2 Farts- og akselerasjonsvektor

Gitt en vektorfunksjon $\vec{r}(t)$, hvor \vec{r} representerer en posisjon og t representerer tid. Da har vi at

- $\vec{r}'(t)$ kalles **fartsvektoren** og $|\vec{r}'(t)|$ kalles **banefarten**.
- $\vec{r}''(t)$ kalles **akselerasjonsvektoren** og $|\vec{r}''(t)|$ kalles **baneakselerasjonen**.

6.2 Farts- og akselerasjonsvektor (forklaring)

Hvis $\vec{r}(t)$ representerer en posisjon (altså en relativ lengde fra et referansepunkt), og t en tid, vil $\vec{r}'(t)$ innebære en lengde delt på en tid. Da vil $\vec{r}'(t)$ representere en størrelse med en enhet for fart. $\vec{r}''(t)$ vil innebære en fart delt på en tid, som da vil representere en akselerasjon.

Oppgaver for kapittel 6

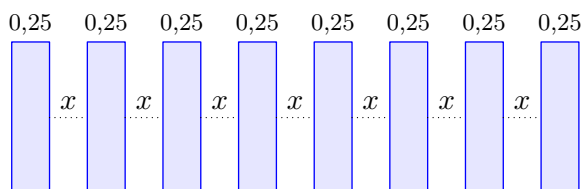
6.1.1

Ola og Kari tilbyr et kurs i svømming. For kurset tjener de til sammen 12 000 kr. Ola er assistenten til Kari, og Kari skal ha dobbelt så mye av inntekten som Ola.

Hvor mye tjener Ola og hvor mye tjener Kari for kurset?

6.1.2

Du skal snekre et gjerde som er 3,4 m langt. For å lage gjerdet skal du bruke 8 planker som er 0,25 m breie, som vist i figuren under. Det skal være den samme avstanden mellom alle plankene.



- a) Sett opp en ligning ut ifra beskrivelsen over. La x være avstanden mellom plankene. b) Løs ligningen fra a).

6.1.3

- a) Skriv dette som en ligning: "Volumet til en firkantet prisme med bredde 4, lengde 7 og høyde x er 252."
b) Løs ligningen fra oppgave a).

6.1.4

- a) Skriv dette som en ligning: "25% av x er lik 845".
b) Løs ligningen fra oppgave a).

6.1.5

Det gis 360 kr rabatt på en vare, og dette tilsvarer 20% av originalprisen.

- a) La x være originalprisen på varen. Sett opp en ligning som beskriver informasjonen gitt over.
- b) Finn originalprisen til varen.

6.1.6 (GV23D1)

Marco kjøpte et headset til 779 kr. Før rabatten på 200 kroner, kostet headsettet 979 kroner.

Omtrent hvor mange prosent rabatt fikk Marco?

6.1.7 (GV2023D1)

To slikkepinner og to sjokolader koster 32 kr.

Fire slikkepinner og to sjokolader koster 44 kr.

Hvor mye koster en slikkepinne?

6.1.8 (E22)

Arne har 120 kr, mens de fem søsknene hans har 30 kr hver. Arne og søsknene skal fordele pengene slik at alle har like mye. Hvor mange kroner må Arne gi til hver av søsknene sine?

6.1.9

Effekten P (målt i Watt) i en elektrisk krets er gitt ved formelen:

$$P = R \cdot I^2$$

hvor R er motstanden og I er strømmen i kretsen.

- Hvis $R = 5 \Omega$ og $I = 10 A$, hva er da effekten?
- Skriv om formelen til en formel for I^2 .

6.1.10

Skriv om arealformelen for et trapes (se MB, s. 143) til en formel for høgden.

6.1.11

På klikk.no finner man disse formelene for å regne ut hvor høy et barn kommer til å bli:

For jenter:

- Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
- Trekk fra 13 cm
- Del med 2.

For gutter:

- Regn ut mors høyde i cm + fars høyde i cm
- Legg til 13 cm
- Del med 2.

Kall barnets (fremtidige) høyde for B , mors høyde for M , og fars høde for F .

- Lag en formel for B når barnet er ei jente.
- Lag en formel for B når barnet er en gutt.

- c) Gjør om formelen fra a) til en formel for F .
- d) Ei jente har en mor som er 165 cm. Formelen fra oppgave a) sier at jenta vil bli 171 cm høy. Hvor høy er faren til jenta?

6.1.12

I 2005 kostet en sykkel 1 500 kr, mens den i 2014 ville kostet 1 784 kr om prisen hadde fulgt konsumprisindeksen.

I 2005 var KPI 82,3, hva var den i 2014?

6.1.13

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 3x - 7$$

$$g(x) = x + 5$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

6.1.14

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = -2x - 3$$

$$g(x) = 4x + 9$$

Finn skjæringspunktet til funksjonene.

6.1.15

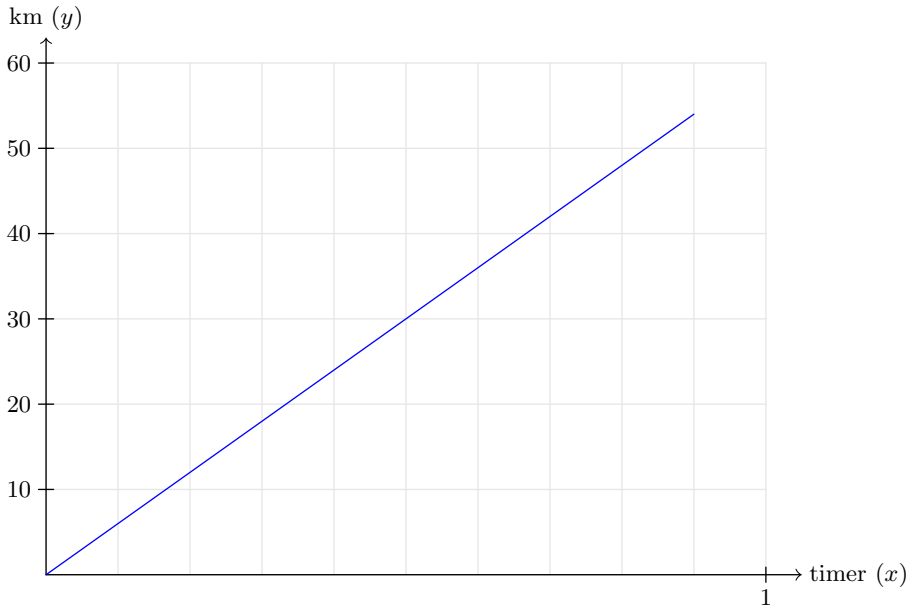
Si at du kan velge mellom disse to månedsabonnementene for mobil:

- **Abonnement A**
300 kr i fast pris og 50 kr per GB data brukt.
- **Abonnement B**
Fast pris på 500 kr og 10 kr per GB data brukt.

- a) For hvilket databruk vil abonnementene koste det samme?
- b) Hvis du bruker ca. 7 GB data i måneden, hvilket abonnement bør du da velge?

6.1.16 (GV23D1)

Jenny kjørte fra hjemmet sitt til hytta. Nedenfor er en grafisk framstilling av sammenhengen mellom tiden (timer) og strekningen (km) for turen til Jenny.



Bestem stigningstallet til funksjonen, og forklar sammenhengen mellom stigningstallet og Jennys gjennomsnittsfart.

6.1.17 (1PV23D1)

Tabellen nedenfor viser høgda til Klara noen år fra hun var 4 år, til hun var 10 år.

Alder (år)	4	5	8	10
Høgde (cm)	100	107	128	142

- Lag en modell som viser sammenhengen mellom høgda og alderen til Klara basert på tallene i tabellen.
- Hvor høg vil Klara være når hun fyller 19 år, ifølge modellen?

Klara var 50 cm høg då ho blei fødd.

- Gjør beregninger og vurder gyldighetsområdet¹ til modellen du fant i oppgave a).

¹Se

6.1.18 (1PV22D1)

Siri har et stykke papp og vil lage en eske. Hun har satt opp en modell som viser volumet $V(x)$ cm³ av esken dersom hun lager den x cm høy

$$4x^3 - 100x^2 + 600x \quad , \quad 0 < x < 10$$

- a) Hvor stort volum får esken dersom Siri lager den 5 cm høy?
- b) Hva finner Siri ut dersom hun løser ligningen $V(x) = 500$?

6.1.19 (1PV22D1)

Et rektangel er tre ganger så langt som det er bredt. Arealet av rektangelet er 432 cm² .

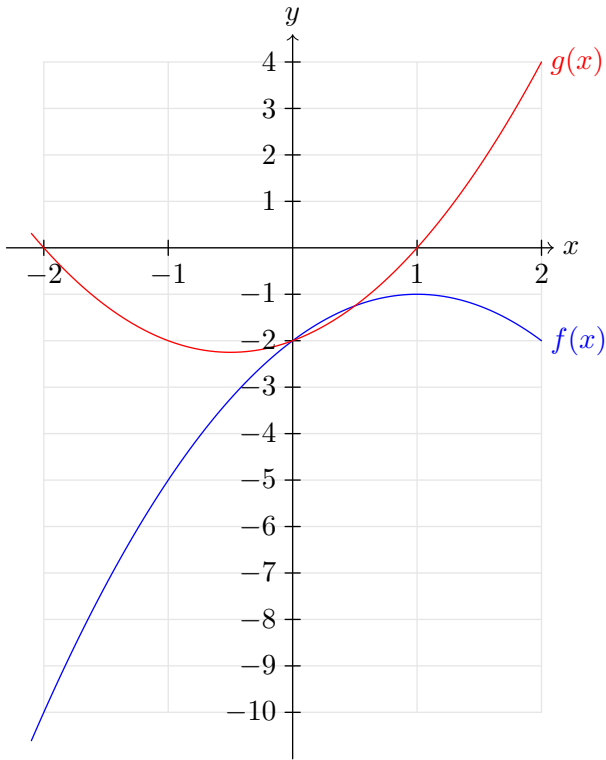
Hvor bredt er rektangelet?

Vedlegg : funk

for ordbeskrivelse

6.1.20

I denne oppgaven kan du anta at punkt på grafen som *ser* ut til å ha heltalls koordinater har det.



- Finne koordinatene til toppunktet til $f(x)$.
- Finne koordinatene til minst ett av skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$.
- Finne nullpunktene til $g(x)$.

6.1.21

Løs ligningssettet

$$3b - 2a = 15$$

$$5a - b = 8$$

6.1.22

Løs ligningssettet

$$8x - 3y = 4x - 3$$

$$x + 8y = y - 2x$$

6.1.23 (GEV22)

To sjokolader og én vannflaske koster 40 kr.

Fire sjokolader og tre vannflasker koster 98 kr.

Gruble 7

Orinigalprisen på en vare er først senket med 20%, og så er den nye prisen senket med 50%. Etter dette koster varen 400 kr. Hva kostet varen opprinnelig?

Gruble 8

La a og b være de to midterste verdiene i et datasett med partalls antall verdier. Vis at metoden for å finne medianen slik den er beskrevet i [regel 2.4](#) er likegyldig med metoden som er beskrevet i [oppgave 2.3.11](#).

Kapittel 7

Digitale verktøy

En viktig del av å beherske digitale verktøy, er å forstå grunnleggende **programmering**. Programmering handler om å gi instruksjoner til en datamaskin. Slik kan datamaskiner utføre utregninger, framstille bilder, animasjoner, spill, og mye mer. For å gi instruksjoner bruker vi forskjellige **programmeringsspråk**, og det er et hav av forskjellige språk å velge i. I norsk skole er de de mest brukte språkene [Scratch](#), [Python](#) og [JavaScript](#)². Det finnes et stort utvalg av gratis ressurser for å lære seg programmeringsspråk, blant andre

- [code.org](#) (koding generelt)
- [w3schools.com](#) (koding generelt)
- [scratch.mit.edu](#) (Scratch)
- [microbit.org](#) (koding med micro:bit)
- [espensklasserom.co](#) (Koding i Scratch, micro:bit m.m.)
- [kidsakoder.no](#) (koding i Scratch, micro:bit, Python m.m.)

Har du allerede nådd et høyt nivå som programmerer, og føler du har god kontroll på data-typer, funksjoner, klasser o.l.? Da anbefales språket [Rust](#). Mange holder dette for å være arvtakeren til C++ og liknende språk.

²Rett nok i blokkbasert utgave ved koding av [micro:bit](#).

7.1 Introduksjon til Python

Python er et programmeringsspråk for **tekstbasert koding**. Dette innebærer at handlingene vi ønsker utført, må kodes som tekst. Filen som inneholder hele koden kaller vi et **skript**. Det synlige resultatet av å kjøre skriptet, kaller vi **utdata**¹. Det er mange måter å få kjørt skriptet sitt på, blant annet kan man bruke en online compiler som programmiz.com.

7.1.1 Objekt, type, funksjon og uttrykk

Vårt første skript består av bare én kodelinje:

```
1 print("Hello world!")
```

```
Utdata  
Hello world!
```

I kommende avsnitt vil begrepene **objekt**, **type**, **funksjon** og **uttrykk** stadig dukke opp.

- Det aller meste i Python er objekter. I skriptet over er både `print()` og `"Hello world"` objekter.
- Objekter vil være av forskjellige typer. `print()` er av typen **function**, mens `"Hello world"` er av typen `str`². Hvilke handlinger som kan utføres med forskjellige objekter avhenger av hvilke typer de er.
- Funksjoner kan ta imot **argumenter**, for så å utføre handlinger. I skriptet over tar `print()`-funksjonen imot argumentet `"Hello world"`, og printer teksten til utdata.
- Uttrykk har sterke likehetstrekk med funksjoner, men tar ikke imot argumenter.

¹**Output** på engelsk.

²'str' er en forkortelse for det engelske ordet 'string'.

Tilvising og utregning

Tekst og tall kan vi se på som noen av de minste byggsteinene (objektene). Python har én type for tekst, og to typer for reelle tall:

<code>str</code>	tekst
<code>int</code>	heltall
<code>float</code>	desimaltall

Det er som regel nyttig å gi objektene våre navn. Dette gjør vi ved å skrive navnet etterfulgt av = og objektet. **Kommentarer** er tekst som ikke blir behandlet som kode. Kommentarer kan vi skrive ved å starte setningen med #.

```
1 hei = "hei" # hei er av typen str. Legg merke til "  
           ved start og slutt  
2 a = 3 # a er av typen int  
3 b = 2.8 # b er av typen float  
4 c = 2. # c=2.0, og er av typen float  
5 d = .7 # d=0.7, og er av typen float  
6 e = -5 # e er av typen int  
7 f = -0.01 # f er av typen float
```

Med Python kan vi selvsagt utføre klassiske regneoperasjoner:

```
1 a = 5
2 b = 2
3
4 print("a+b = ", a+b)
5 print("a-b = ", a-b)
6 print("a*b = ", a*b)
7 print("a/b = ", a/b)
8 print("a**b = ", a**b) # potens med grunntall a og
   eksponent b
9 print("a//b = ", a//b) # a/b rundet ned til nærmeste
   heltall
10 print("a%b = ", a%b) # resten til a/b
```

Utdata

a+b = 7
a-b = 3
a*b = 10
a/b = 2.5
a**b = 25
a//b = 2
a%b = 1

Funksjonene `str()`, `int()` og `float()` kan vi bruke til å gjøre om objekter til typene `int` eller `float`:

```
1 s = "2"
2 b = 3
3 c = 2.0
4
5 b_s = str(b) # b omgjort til str
6 c_s = str(c) # c omgjort til str
7 print(b_s+c_s)
8
9 s_i = int(s)
10 print(s_i*b)
11
12 s_f = float(s)
13 print(s_f*b)
```

Utdata

32.0

6

6.0

En viktig ting å være klar over er at `=` i Python *ikke* betyr det samme som `=` i matematikk. Mens `=` kan oversettes til "er lik", kan vi si at `=` kan oversettes til 'er'.

```
1 a = 5 # a ER nå 5
2 print(a)
3 a = a+1 # a ER nå det a VAR, + 1
4 print(a)
```

Utdata

5

6

At et objekt legger til seg selv og en annen verdi er så vanlig i programmering at Python har en egen operator for det:

```
1 a = 5 # a ER nå 5
2 a+= 1 # Samme som å skrive a = a+1
3 print(a)
```

Utdata

```
5
6
```

Selv om datamaskiner er ekstremt raske til å utføre utregninger, har de en begrensning det er viktig å være klar over; avrundingsfeil. En av grunnene til dette er at datamaskiner bare kan bruke et visst antall desimaler for å representere tall. En annen grunn er at datamaskiner anvender [totalssystemet](#). Det er mange verdier vi kan skrive eksakt i titalssystemet som ikke lar seg skrive eksakt i totalssystemet. For å bøte på dette kan vi bruke funksjonen `round()`:

```
1 a = 8.3/10
2 print(a) # avrundingsfeil, da vi skulle hatt a = 0.83
3
4 a = round(a, 2) # runder av a til tall med to
   desimaler
5 print(a)
```

Utdata

```
0.8300000000000001
0.83
```

7.1.2 Egne funksjoner

Ved å bruke metoden `def` kan man lage sine egne funksjoner. En funksjon kan utføre handlinger, og den kan `returnere` (return på engelsk) ett eller flere objekt. Den kan også ta imot argumenter. Koden vi skriver inni en funksjon blir bare utført hvis vi `kaller` (call på engelsk) på funksjonen.

```
1 # a er en funksjon som ikke tar noen argumenter.
2 # Legg merke til 'def' først og ':' til slutt.
3 # Kodelinjene som hører til funksjonen må stå med
  innrykk
4 def a():
5     print("Hei, noen kalte visst på funksjon a?")
6
7
8 # b er en funksjon som tar argumentet 'test'
9 def b(tekst):
10    print("Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som
      ble gitt var: ", tekst)
11
12 # c er er funksjon som tar argmumentene a og b
13 # c returnerer et objekt
14 def c(a, b):
15     return a+b
16
17 b("Hello!") # vi kaller på b med argumentet "hello"
18
19 d = c(2,3) # Vi kaller på a med argumentene 2 og 3
20
21 print(d)
22
23 # merk at teksten gitt i a ikke blir printet, fordi vi
      ikke har kalt på a.
24
25
26
27
28
29
```

Utdata

```
Hei. Noen kalte på funksjon b. Argumentet som ble gitt var:
Hello!
5
```

7.1.3 Boolske verdier og vilkår

Verdiene **True** og **False** kalles **boolske verdier**. Disse vil være resultatet når vi sjekker om objekter er like eller ulike. For å sjekke dette har vi de **sammenlignende operatorene**:

operator	betydning
<code>==</code>	er lik
<code>!=</code>	er <i>ikke</i> lik
<code>></code>	er større enn
<code>>=</code>	er større enn, eller lik
<code><</code>	er mindre enn
<code><=</code>	er mindre enn, eller lik

```
1 a = 5
2 b = 4
3
4 print(a == b)
5 print(a != b)
6 print(a > b)
7 print(a < b)
```

Utdata

```
False
True
True
False
```

I tillegg til de sammenlignende operatorene kan vi bruke de **logiske operatorene** **and**, **or** og **not**

```
1 a = 5
2 b = 4
3 c = 9
4
5 print(a == b and c > a)
6 print(a == b or c > a)
7 print(not a == b)
```

Utdata

```
False
True
True
```

Språkboksen

Sjekker som bruker de sammenlignende og de logiske operatorene, skal vi heretter kalle **vilkår**.

7.1.4 Uttrykkene **if**, **else** og **elif**

Når vi ønsker å utføre handlinger bare *hvis* et vilkår er sant (**True**), bruker vi uttrykket **if** foran vilkåret. Koden vi skriver med innrykk under **if**-linjen, vil bare bli utført hvis vilkåret gir **True**.

```
1 a = 5
2 b = 4
3 c = 9
4
5 if c > b: # legg merke til kolon (:) til slutt
6     print("Jepp, c er større enn b")
7
8 if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
9     print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")
```

Utdata

Jepp, c er større enn b

Hvis man først vil sjekke om et vilkår er sant, og så utføre handlinger hvis det *ikke* er det, kan vi bruke uttrykket **else**:

```
1 a = 5
2 c = 9
3
4 if a > c: # legg merke til kolon (:) til slutt
5     print("Denne teksten kommer ikke i output, siden
    vilkåret er False")
6
7 else: # legg merke til kolon (:) til slutt
8     print("Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja
    over var False")
```

Utdata

Men denne kommer, fordi vilkåret i if-linja over var False

Uttrykket **else** tar bare hensyn til (og gir ikke mening uten) **if**-uttrykket like over seg. Hvis vi vil at handlinger skal utføres *bare* hvis ingen

tidligere `if` uttrykk ga noe utslag, må vi bruke¹ uttrykket `elif`. Dette er et `if`-uttrykk som slår inn hvis `if`-uttrykket over *ikke* ga utslag.

```
1 a = 2
2
3 if a > 3:
4     print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")
5
6 elif a < 1: #Siden if uttrykket over ikke ga utslag,
7             sjekkes vilkåret b < 1
8             print("Denne linja printes ikke, vilkåret er False")
9
10 else:
11     print("Nå er vi sikre på at 1 < b < 3")
```

Utdata

Nå er vi sikre på at $1 < b < 3$

Merk

Når du jobber med tall, kan noen vilkår du forventer skal være `True` vise seg å være `False`. Dette handler ofte om avrundingsfeil, som vi har omtalt på side 166.

¹`elif` er en forkortelse for `else if`, som også kan brukes.

7.1.5 Lister

Lister kan vi bruke for å samle objekter. Objektene som er i listen kalles **elementene** til listen.

```
1 strings = ["98", "99", "100"]
2 floats = [1.7, 1.2]
3 ints = [96, 97, 98, 99, 100]
4 mixed = [1.7, 96, "100"]
5 empty = []
```

Elementene i lister er **indekserte**. Første objekt har indeks 0, andre objekt har indeks 1 og så videre:

```
1 strings = ["98", "99", "100"]
2 floats = [1.7, 1.2]
3 ints = [96, 97, 98, 99, 100]
4 mixed = [1.7, 96, "100"]
5 empty = []
```

Utdata

```
96
99
98
```

Med den innebygde funksjonen `append()` kan vi legge til et objekt i enden av listen. Dette er en **innebygd funksjon**¹, som vi skriver i enden av navnet på listen, med et punktum foran.

¹Kort fortalt betyr det at det bare er noen typer objekter som kan bruke denne funksjonen.

```
1 min_liste = []
2 print(min_liste)
3
4 min_liste.append(3)
5 print(min_liste)
6
7 min_liste.append(7)
8 print(min_liste)
```

Utdata

[]

[3]

[3, 7]

Med funksjonen `pop()` kan vi hente ut et objekt fra listen

```
1 min_liste = [6, 10, 15, 19]
2
3 a = min_liste.pop() # a = det siste elementet i listen
4 print("a =",a)
5 print("min_liste =",min_liste)
6
7 a = min_liste.pop(1) # a = elementet med indeks 1
8 print("a =",a)
9 print("min_liste =",min_liste)
```

Utdata

```
a = 19
min_liste = [6, 10, 15]
a = 10
min_liste = [6, 15]
```

Forklar for deg selv

Hva er forskjellen på å skrive `a = min_liste[1]` og å skrive `a = min_liste.pop(1)`?

Med funksjonen `sort()` kan vi sortere elementene i listen.

```
1 heltall = [9, 0, 8, 3, 1, 7, 4]
2 bokstaver = ['c', 'a', 'b', 'e', 'd']
3
4 heltall.sort()
5 bokstaver.sort()
6
7 print(heltall)
8 print(bokstaver)
```

Utdata

```
[0, 1, 3, 4, 7, 8, 9]
['a', 'b', 'c', 'd', 'e']
```

Med funksjonene `count()` kan vi telle gjentatte elementer i listen.

```
1 heltall = [2, 7, 2, 2, 2]
2 frukt = ['banan', 'eple', 'banan']
3
4 antall_toere = heltall.count(2)
5 antall_sjuere = heltall.count(7)
6 antall_bananer = frukt.count('banan')
7 antall_appelsiner = frukt.count('appelsin')
8
9 print(antall_toere)
10 print(antall_sjuere)
11 print(antall_bananer)
12 print(antall_appelsiner)
```

Utdata

```
4
1
2
0
```

Med funksjonen `len()` kan vi finne antall elementer i en liste, og med funksjonen `sum()` kan vi finne summen av lister med tall som elementer.

```
1 heltall = [2, 7, 2, 2, 2]
2 frukt = ['banan', 'eple', 'banan']
3
4 print(len(heltall))
5 print(len(frukt))
6 print(sum(heltall))
```

Utdata

```
5
3
15
```

Med uttrykket `in` kan vi sjekke om et element er i en liste.

```
1 heltall = [1, 2, 3]
2
3 print(1 in heltall)
4 print(0 in heltall)
```

Utdata

True

False

7.1.6 Looper; `for` og `while`

`for` loop

For objekter som inneholder flere elementer, kan vi bruke `for`-looper til å utføre handlinger for hvert element. Handlingene må vi skrive med et innrykk etter `for`-uttrykket:

```
1 min_liste = [5, 10, 15]
2
3 for number in min_liste:
4     print(number)
5     print(number*10)
6     print("\n") # lager et blankt mellomrom
7
```

Utdata

```
5
50

10
100

15
150
```

Språkboksen

Å gå gjennom hvert element i (for eksempel) en liste kalles "å iterere over listen".

Ofte er det ønskelig å iterere over heltallene 0, 1, 2 og så videre. Til dette kan vi bruke `range()`:

```
1 ints = range(3)
2
3 for i in ints:
4     print(i)
5
```

Utdata

```
0
1
2
```

while loop

Hvis vi ønsker at handlinger skal utføres fram til et vilkår er sant, kan vi bruke en `while`-loop:

```
1 a = 1
2
3 while a < 5:
4     print(a)
5     a += 1
```

Utdata

```
1
2
3
4
```

7.1.7 `input()`

Vi kan bruke funksjonen `input()` til å skrive inn tekst mens skriptet kjører:

```
1 innskrevet_tekst = input("Skriv inn her: ")
2 print(innskrevet_tekst)
```

Teksten vi har skrevet inni `input()` i skriptet over er teksten vi ønsker vist foran teksten som ønskes innskrevet. Linje 2 i denne koden vil ikke kjøres før en tekst er innskrevet.

```
1 innskrevet_tekst = input("Skriv inn her: ")
2 print(innskrevet_tekst)
```

Utdata

```
Skriv inn tekst her: OK
OK
```

Objektet gitt av en `input()`-funksjon vil alltid være av typen `str`. Man må alltid passe på å gjøre om objekter til rett type:

```
1 print("La oss regne ut a*b")
2 a_str = input("a = ")
3 b_str = input("b = ")
4 a = float(a_str)
5 b = float(b_str)
6 print("a*b = ", a*b)
```

Utdata

```
La oss regne ut a*b
a = 3.7
b = 4
a*b = 14.8
```

7.1.8 Moduler

Noen ganger er vi nødt til å importere **moduler** for å få tilgang til objekter vi ønsker. Dette gjør vi ved å bruke `import`-metoden:

```
1 # importerer konstanten pi fra modulen 'math'
2 from math import pi
3 print(pi)
4
5 # importerer funksjonen randint fra modulen 'random'
6 from random import randint
7
8 # randint(2, 5) returnerer tilfeldig valgt heltall
9 # mellom (og inkludert) 2 og 5.
10 print(randint(2, 5))
```

Utdata

```
3.141592653589793
4
```

7.1.9 Feilmeldinger

Påstand: Alle programmerere vil erfare at skriptet ikke kjører fordi vi ikke har skrevet koden på rett måte. Dette kalles en **syntax error**. Ved syntax error vil man få beskjed om på hvilken linje feilen befinner seg, og hva som er feil. De vanligste feilene er

- Å glemme innrykk når man bruker metoder som **def**, **for**, **while**, og **if**

```
1 a = 472
2 b = 98
3
4 if a*b > 48000:
5 print("a*b er større enn 48000")
```

Utdata

```
line 5, in <module>
print("a*b er større enn 48000")
^
IndentationError: expected an indented block after
'if' statement on line 4
```

- Å utføre operasjoner på typer det ikke gir mening for

```
1 b = "98"  
2 b_opphøyd_i_andre = b**2
```

Utdata

```
line 2, in <module>
```

```
b_opphøyd_i_andre = b**2
```

```
TypeError: unsupported operand type(s) for ** or  
pow(): 'str' and 'int'
```

7.1.10 NumPy

I Python kan man importere det som kalles **bibliotek** for å få tilgang til enda flere typer objekter, funksjoner og liknende. NumPy er et bibliotek som inneholder typen `numpy.ndarray`. Denne typen har mange fellestrekk med en liste, men skiller seg ut ved at den inneholder et bestemt antall elementer. Dette gjør blant annet at prosesser som bruker NumPy-arrays istedenfor lister går raskere, og at NumPy-arrays egner seg bedre til regneoperasjoner.

For å lage NumPy-arrays må vi importere NumPy-biblioteket:

```
1 import numpy as np  
2  
3 a = np.array([1, 2]) # lager array fra en liste  
4 b = np.arange(4) # samme som å skrive np.array(range  
   (4))  
5 c = np.zeros(3) # array med 3 elementer lik 0  
6 d = np.linspace(2,11,4) # array med 4 elementer.  
   d[0] = 2 og d[3] = 11.  
   Naboelement har lik differanse  
7  
8 print(a)  
9 print(b)  
10 print(c)  
11 print(d)
```

Utdata

```
[1 2]
```

```
[0 1 2 3]
```

```
[0. 0. 0.]
```

```
[ 2.  5.  8. 11.]
```

Merk

Til forskjell fra lister, er elementene skilt bare med mellomrom når de printes.

Klassiske regnearter

Regneoperasjoner mellom NumPy-arrays blir utført elementvis:

```
1 import numpy as np
2
3 a = np.array([10, 20])
4 b = np.array([2, 4])
5
6 print(a+b) # [10+2 20+4]
7 print(a*b) # [10*2 20*4]
```

Utdata

```
[12 24]
[20 80]
```

Vektoroperasjoner

NumPy-arrays fungerer ypperlig til å representere vektorer, og har innebygde metoder for å finne skalarprodukt, kryssprodukt og determinanter:

```
1 import numpy as np
2
3 a = np.array([2, -7])
4 b = np.array([1, 5])
5 c = np.array([2, -7, 1])
6 d = np.array([1, 5, 0])
7
8 print(a.dot(b)) # skalarprodukt av a og b
9 print(np.cross(c, d)) # kryssproduktet av c og d
10
11 ab = np.array([a, b])
12 print(np.linalg.det(ab)) # det(a,b)
```

Utdata

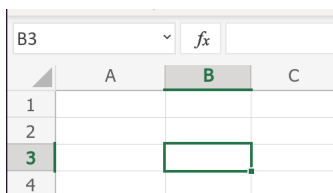
```
-33
[-5 1 17]
17.0
```

7.2 Regneark

I denne boka tar vi utgangspunkt i Mircrosofts programvare Excel. Det finnes andre gode regneark på markedet, for eksempel Google Sheets og Libre Office Calc. Disse tre nevnte regnearkene ligner hverandre mye både i utforming og i funksjoner de har å tilby.

7.2.1 Introduksjon

Når du åpner et regneark vil du få opp en tabell hvor *radene* er nummerert med tall (1, 2 3 osv), mens *kolonnene* er indeksert med bokstaver (A, B, C osv.). Hvordan radene og kolonnene brukes er avgjørende for å forstå Excel. I figuren under har vi markert det vi kaller *celle B3*. Dette er altså cellen hvor *rad 3* og *kolonne B* krysser hverandre. (Legg også merke til at B3 er markert oppe til venstre i figuren).



	A	B	C
1			
2			
3			
4			

I hver celle kan vi skrive inn både tall og tekst. Si at Ole har en jobb med 250 kr i timelønn, og at han jobber 7 timer i uka. Denne informasjonen kan vi skrive inn i Excel slik:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4		

7.2.2 Utregninger

Vi ønsker nå å finne ukelønnen til Ole. Ukelønnen er gitt ved formelen

$$\text{ukelønn} = \text{timelønn} \cdot \text{timer i uka}$$

For å foreta en utregning i regneark, starter man med å skrive = i cellen. I celle B4 finner vi ukelønnen til Ole ved å skrive =250*7.

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	=250*7

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	1750

Når vi trykker enter-tasten, er det resultatet, 1750, som vises i cellen. Ønsker vi å se formelen vi har brukt, kan vi dobbeltklikke på cellen, eller se i *inntastingsfeltet* (oppe til høyre i figuren under.)

		fx =250*7	
	A	B	C
1		Ole	
2	Timelønn	250	
3	Timer i uka	7	
4	Ukelønn	1750	

Merk: Inntastingsfeltet kan også brukes til å taste inn tall og tekst i cellen.

7.2.3 Cellereferanser

Excels kanskje viktigste egenskap er *cellereferanser*. Dette betyr kort sagt at vi bruker celler istedenfor tall når vi skal gjøre utregninger. I forrige seksjon regnet vi lønnen til Ole ved å gange 250 (timelønnen) med 7 (timer i uka). Ved å bruke cellereferanser kunne vi isteden gjort dette:

Tallet tilhørende timelønnen (250) står i celle B2, mens tallet tilhørende timer (35) står i celle B3. For å gange tallene i disse cellene kan vi skrive $=B2*B3$:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	250
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	$=B2*B3$

Én av fordelene med å bruke cellereferanser er at det blir mye lettere å rette opp i feil som har blitt gjort. Si f.eks. at det skulle stått 300 istedenfor 250 i B3. Om vi derfor endrer B3, vil resultatet i B4 endre seg deretter:

	A	B
1		Ole
2	Timelønn	300
3	Timer i uka	7
4	Ukelønn	2100

Merk: Du kan også trykke på cellene du ønsker å bruke i formlene dine, slik som vist [her](#).

7.2.4 Kopiering og låsing av celler

Kopiering av cellene er en metode som hindrer deg i å skrive de samme formlene om og om igjen. Vi ønsker nå å lage et ark som passer til følgende informasjon:

- Timelønnen til Ole, Dole og Doffen er henholdsvis 300 kr, 200 kr og 500 kr.
- Alle tre jobber 7 dager i uka.
- Vi ønsker å regne ut hvor mange timer de jobber til sammen og hvor mye ukelønn de har til sammen.

Vi starter med å sette opp dette regnearket:

	A	B	C	D
1		Ole	Dole	Doffen
2	Timelønn	300	200	500
3	Timer i uka			
4	Ukelønn			

Her har vi bare fylt inne informasjonen som er *unik* for Ole, Dole og Doffen, nettopp fordi de andre cellene enten inneholder de samme tallene eller den samme regnemåten. For cellene som ikke er unike bør vi bruke kopieringsmulighetene, og dette vises i denne [videoen](#). Her er en liten beskrivelse av hva som blir gjort:

1. Siden alle tre jobber i 7 timer, skriver vi 7 i celle B4. Etterpå kopierer vi ved å trykke musepekeren helt nede i høyre hjørne av B4 og drar *bortover* til C2 og D2.
2. Siden regnemåten av ukelønn er den samme for alle tre, skriver vi den (med cellereferanser) inn i B4, og kopierer den *bortover* til celle C4 og D4.
3. Regnemåten for summen av timene og summen av ukelønnene er også den samme, vi skriver den derfor inn i celle E3 og kopierer den *nedover* til E4.

Resultatet ble dette:

	A	B	C	D	E
1		Ole	Dole	Doffen	
2	Timelønn	300	200	500	Sum
3	Timer i uka	7	7	7	21
4	Ukelønn	2100	1400	3500	7000

	A	B	C	D	E
1		Ole	Dole	Doffen	
2	Timelønn	300	200	500	Sum
3	Timer i uka	=7	=7	=7	=B3+C3+D3
4	Ukelønn	=B2*B3	=C2*C3	=D2*D3	=B4+C4+D4

Av det vi har sett i [videoen](#) og figurene over kan vi ta med oss to generelle regler:

1. Hver gang man kopierer en formel én celle *bortover*, vil kolonnene i formelen øke med én bokstav i alfabetet. (A blir til B, B blir til C osv.)
2. Hver gang man kopierer en formel én celle *nedover*, vil radene i formelen øke med 1 (1 blir 2 B, 2 blir til 3 osv.).

Låsing av celler

Når man kopierer celler, er det viktig å se opp for celler man ønsker å bruke i alle kopiene, for disse cellen må *låses*. Si for eksempel at Ole, Dole og Doffen alle jobber 48 arbeidsuker i året. For å finne årslønnen deres må vi altså gange ukeslønnen til hver av dem med 48.

Igen merker vi oss at regnemethoden for å finne årslønnen er den samme for alle tre, men hvis vi bruker celle B8 i en formel, og kopierer slik vi har gjort hittil, vil bokstaven B endre seg i formlene. For å unngå dette skriver vi \$ foran B i formelen – dette gjør at kolonnebokstaven ikke endrer seg, selv om vi kopierer formelen. Dette er vist i denne [videoen](#), og resultatet ser vi her:

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		Ole	Dole	Doffen	
4	Timelønn	300	200	500	Sum
5	Timer i uka	7	7	7	21
6	Ukelønn	2100	1400	3500	7000
7	Årslønn	100800	67200	168000	

	A	B	C	D	E
1	Arbeidsuker	48			
2					
3		Ole	Dole	Doffen	
4	Timelønn	300	200	500	Sum
5	Timer i uka	=7	=7	=7	=B5+C5+D5
6	Ukelønn	=B4*B5	=C4*C5	=D4*D5	=B6+C6+D6
7	Årslønn	=\$B1*B6	=\$B1*C6	=\$B1*D6	

Skal vi låse en celle *nedover* må vi sette dollaren foran radnummeret, for eksempel B\$1.

7.2.5 Andre nyttige funksjoner

Videoer

- [Sum bort og sum ned](#)
- [Justere bredde på kolonne](#)
- [Sette inn rad](#)
- [Formelvisning](#)
- [Gjøre om til prosenttall](#)
- [Endre antall desimaler](#)
- [Sorter i stigende/synkende rekkefølge](#)
- [Lage søylediagram](#)
- [Lage sektordiagram](#)
- [Lage linjediagram](#)

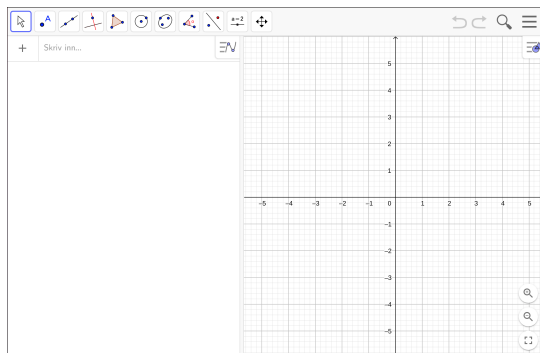
Kommandoer (skrives med = foran).

- **SUM(celle1:celle2)**
Summerer alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- **AVERAGE(celle1:celle2)**
Finner gjennomsnittet for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- **MEDIAN(celle1:celle2)**
Finner medianen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.
- **VAR.P(celle1:celle2)**
Finner variansen for alle verdiene fra og med celle1 til og med celle2.

7.3 GeoGebra

7.3.1 Introduksjon

Når du åpner GeoGebra får du et bilde som dette:



Feltet hvor det står "Skriv inn" kalles *inntastingsfeltet*. Dette feltet og det blanke feltet under utgjør *algebrafeltet*. Koordinatsystemet til høyre kalles *grafikkfeltet*.

7.3.2 Å skrive inn punkt, funksjoner og linjer

Punkt

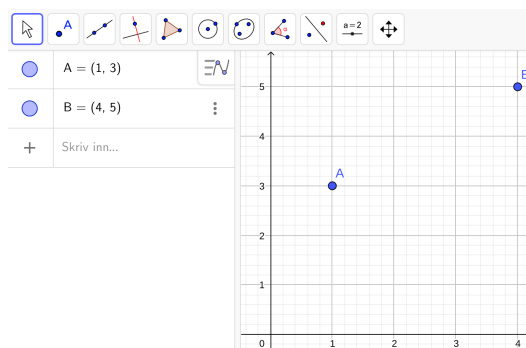
Si at vi ønsker å få punktene $(1,3)$ og $(4,5)$ til å vises i grafikkfeltet. I inntastingsfeltet skriver vi da

$$(1,3)$$

og

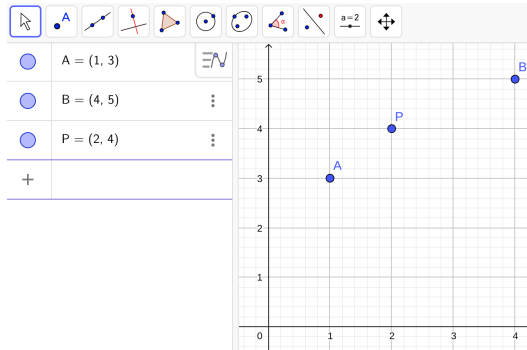
$$(4,5)$$

GeoGebra kaller da punktene A og B , og tegner dem inn i grafikkfeltet:



Ønsker vi å bestemme et punkts navn kan vi f. eks skrive

$$P=(2,4)$$



Funksjoner

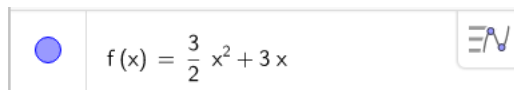
Si vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

For å bruke $f(x)$ i GeoGebra, skriver vi:

$$3/2*x^2+3x$$

Når vi ikke gir funksjonen noen navn, vil GeoGebra automatisk gi funksjonen navnet f . I algebrafeltet får vi derfor



I grafikkfeltet får vi grafen til f .

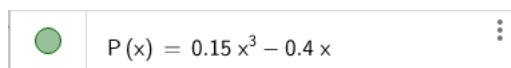
Hvis vi isteden har funksjonen

$$P(x) = 0,15x^3 - 0,4x$$

er det to ting vi må passe på. Det første er at *alle desimaltall må skrives med punktum istedenfor komma* i GeoGebra. Det andre er at vi ønsker å gi funksjonen navnet $P(x)$. Vi skriver da

$$P(x) = 0.15x^3 - 0.4x$$

og får



Obs!

Man kan aldri gi funksjoner navnet $y(x)$ i GeoGebra. y kan bare brukes når man skriver inn uttrykk for en rett linje, altså $y = ax + b$, hvor a og b er to valgfrie tall.

Vannrette og loddrette linjer

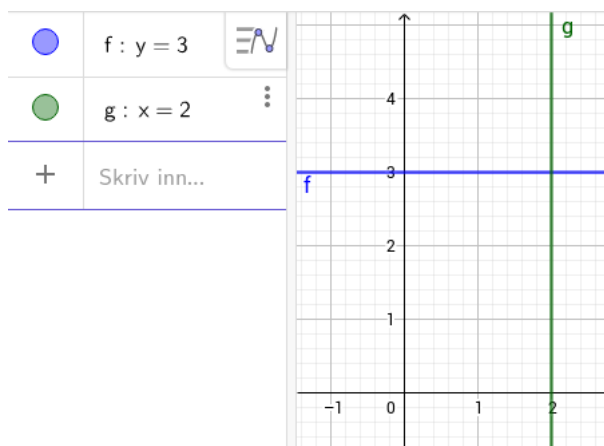
Ønser vi å lage ei linje som går vannrett gjennom verdien 3 på y -aksen og ei linje som går loddrett gjennom verdien 2 på x -aksen skriver vi:

$$y = 3$$

og

$$x = 2$$

Da får vi denne figuren:



7.3.3 Å finne verdien til funksjoner og linjer

Funksjoner

Si vi har funksjonen

$$H(x) = x^2 + 3x - 3$$

Hvis vi ønsker å vite hva $H(2)$ er, skriver vi

$$H(2)$$

som resulterer i dette

●	$H(x) = x^2 + 3x - 3$	⋮
	$a = H(2)$ $\rightarrow 7$	⋮

Da vet vi at $H(2) = 7$.

Linjer

Det anbefales på det sterkeste at du bruker funksjonsuttrykk når du behandler linjer i GeoGebra, men i noen tilfeller kommer man ikke utenom linjer på former $y = ax + b$.

La oss se på de to linjene

$$y = x - 3$$

$$y = -2x + 1$$

Vi skriver disse inn i GeoGebra, og får

●	$f: y = x - 3$	☰
●	$g: y = -2x + 1$	⋮

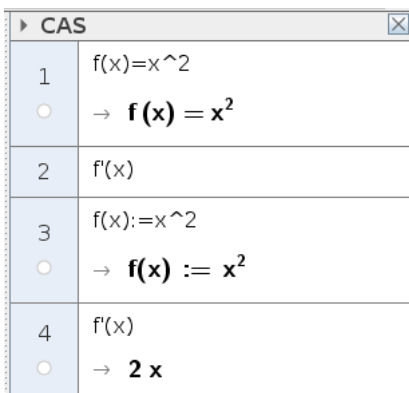
Ønsker vi nå å finne hva verdien til $y = x - 3$ er når $x = 2$, må vi legge merke til at GeoGebra har kalt denne linja for f . Svaret vi søker får vi da ved å skrive $f(2)$. Ønsker vi samtidig å vite hva $y = -2x + 1$ er når $x = 0$, må vi skrive $g(0)$:

●	$a = f(2)$ $\rightarrow -1$	⋮
●	$b = g(0)$ $\rightarrow 1$	⋮

7.3.4 CAS

Definere variabler

Hvis vi ønsker å definere variabler som vi skal bruke i andre celler, må vi skrive $:=$. I figuren under er forskjellen mellom $=$ og $:=$ demonstrert med et forsøk på å finne $f'(x)$ til funksjonen $f(x) = x^2$:



CAS	
1	f(x)=x ² → f(x) = x²
2	f'(x)
3	f(x):=x ² → f(x) := x²
4	f'(x) → 2 x

Av figuren legger vi også merke til at celle 3 og celle 4 er markert med en hvit runding. Dette indikerer at størrelsen vil vises i *Grafikkfelt* eller *Grafikkfelt 3D* hvis man trykker på markøren (den skal da bli blå).

Celle-referanser

Ofte kommer vi ut for situasjoner der vi ønsker å bruke uttrykket vi har funnet i tidligere celler. Som eksempel har vi i celle 1 skrevet inn volumet v av en kule med radius r , mens i celle 2 har vi volumet V av en kule med radius R . Ønsker vi å finne forholdet mellom disse, kan vi bruke cellereferanser som hjelpemiddel. For å referere til celle 1 skriver vi $\$1$ og for celle 2 skriver vi $\$2$. Forholdet $\frac{v}{V}$ kan vi da skrive som $\$1/\2 :

CAS	
1	$v = \frac{4}{3} \pi r^3$ $\rightarrow \mathbf{v = \frac{4}{3} r^3 \pi}$
2	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $\rightarrow \mathbf{V = \frac{4}{3} R^3 \pi}$
3	$\$1 / \2 $\rightarrow \mathbf{\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3}}$

Lister

Når et uttrykk står inni sløyfeparenteser $\{\}$, betyr det at det er laget en liste. En liste inneholder flere elementer som vi kan hente ut ved `Element`-kommandoen.

1	$\{a, b, c\}$ <input type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{\{a, b, c\}}$
2	<code>Element(\$1,1)</code> $\rightarrow \mathbf{a}$
3	<code>Element(\$1,2)</code> $\rightarrow \mathbf{b}$
4	<code>Element(\$1,3)</code> $\rightarrow \mathbf{c}$

For å løse ligninger med flere ukjente kan vi bruke lister:

CAS	
1	$x+y+z=6$ <input type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{x + y + z = 6}$
2	$x+y=3$ <input type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{x + y = 3}$
3	$y+z=5$ <input type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{y + z = 5}$
4	<code>Løs[{\$1, \$2, \$3}]</code> <input type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{\{\{x = 1, y = 2, z = 3\}\}}$

Høyre- og venstresiden

De fleste uttrykkene vi jobber med i CAS inneholder = er ligninger med en venstre- og høyreside. Ofte ønsker vi å bruke uttrykket på bare én av disse sidene, og oftest høyresiden. Som eksempel har vi løst ligningen $(a + b)x = c$ og definert funksjonen $f(x) = dx^2$. Vi ønsker så å sette løsningen av ligningen inn i funksjonen. Dette gjør vi ved hjelp av HøyreSide-kommandoen:

CAS	
1	Løs[(a+b)x=c] → $\left\{ x = \frac{c}{a+b} \right\}$
2	f(x):= d x^2 → $f(x) := dx^2$
3	f(HøyreSide[\$1]) → $\left\{ d \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right\}$
4	f(\$1) → $\left\{ dx^2 = d \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right\}$

ByttUt

For å endre variabelen i et uttrykk, kan vi bruke **ByttUt**-kommandoen. La oss se på uttrykket

$$\frac{a + b}{c}$$

Vi ønsker nå å sette $a = d$, $b = 2$ og $c = f$. Dette kan vi gjøre ved å skrive

CAS	
1	$(a+b)/c$ → $\frac{\mathbf{a + b}}{\mathbf{c}}$
2	ByttUt[\$1, {a = d, b = 2, c = f}] → $\frac{\mathbf{d + 2}}{\mathbf{f}}$

7.3.5 Knapper og kommandoer

Grafikkfelt

Knappene velges fra rullemenyer på verktøylinjen. Nummereringen av menyene er fra venstre.



Lager et nytt punkt. (Meny nr. 1)



Lager linje mellom to punkt. (Meny nr. 2)



Finner topp- og bunnpunkt til en funksjon. (Meny nr. 2)



Finner nullpunktene til en funksjon. (Meny nr. 2)



Finner skjæringspunkt mellom to objekt. (Meny nr. 3)



Lager vektoren mellom to punkt (Meny nr. 3)



Lager en tekstboks. (Meny nr. 10)



Flytter grafikkfeltet. Endrer verdiavstanden hvis man peker på aksene. (Meny nr. 10)

CAS



Gjengir uttrykket som er inntastet, ofte i forkortet form.



Gjengir uttrykket som er inntastet.



Gir tilnærmet verdi av et uttrykk (som desimaltall).



Gir eksaktløsningen av en ligning.



Gir tilnærmet løsning av en ligning som desimaltall.

Hurtigtaster

	Beskrivelse	PC	Mac
$\sqrt{\quad}$	kvadratroten	alt+r	alt+r
π	pi	alt+p	alt+p
∞	uendelig	alt+u	alt+,
\otimes	kryssprodukt	alt+shift+8	ctrl+shift+8
e	eulers tall	alt+e	alt+e
$^\circ$	gradtegnet ($\frac{\pi}{180}$)	alt+o	alt+o

Videoer

- Finne nullpunktene til en graf
- Finne lokale bunnpunkt (eller toppunkt) til en graf
- Finne skjæringspunktene til to funksjoner
- Justere akser
- Endre tykkelse, farge o.l på graf
- Tegne graf på gitt intervall

I videoen tegner vi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 5$.

- Lage linje mellom to punkt

Legg merke til hva som gjøres mot slutten av videoen for å få det vante uttrykket $y = ax + b$.

- Utføre regresjon i algebrafelt

I videoen har vi på forhånd skrevet inn tallene i tabellen under, som viser elbilsalget i Norge antall år etter 2010. Disse tallene ble også brukt i [seksjon 6.2](#).

Det utføres regresjon med en linje, en kvadratisk funksjon og en 4. grads funksjon.

antall år	elbiler
0	3347
1	5381
2	9565
3	19678
4	42356
5	73312
6	101126
7	138477
8	194900
9	260688
10	337201
11	455271

- Regresjonsanalyse i regnearket

I videoen finner vi hvilket polynom som best beskriver summen av de n første kvadrattallene ($1^2, 2^2, 3^2$ og så videre). R^2 er et tall mellom 0 og 1 som viser hvor nærme funksjonen er å skjære gjennom hvert punkt, hvor $R^2 = 1$ betyr at funksjonen skjærer hvert punkt eksakt.

n	sum
1	1
2	5
3	14
4	30
5	55

Kommandoliste for grunnskole og P-fag

Merk: Mange av kommandoene har egne knapper, som blant annet vist i videoene over.

- **abs(<x>)**
Gir lengden til x (et tall, et linjestykke o.l.). Alternativt kan man skrive $|x|$.
- **Avstand(<Punkt>, <Objekt>)**
Gir avstanden fra et punkt til et objekt.
- **Linje(<Punkt>, <Punkt>)**
Gir linjen mellom to punkt.
- **Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)**
Finner lokale topp- og bunnpunkt til en funksjon på et gitt intervall.
- **Ekstremalpunkt(<Polynom>)**
Finner lokale topp- og bunnpunkt til et polynom.
- **Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)**
Tegner en funksjon innenfor et gitt intervall.
- **Mangekant(<Punkt>, ..., <Punkt>)**
Tegner mangekanten mellom gitte punkt.
- **Løs(<Likning med x>)**
Løser en likning med x som ukjent.
- **Løs(<Liste med likninger>, <Liste med variabler>)**
Finner alle løsninger av en liste med ligninger med gitte variabel som ukjente.
- **Løs(<Likning>, <Variabel>)**
Finner alle løsninger av en gitt likning med en gitt variabel som ukjent.
- **Nullpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)**
Gir nullpunktene til en funksjon innenfor et gitt intervall
- **RegLin(<Liste>)**
Bruker regresjon med en rett linje for å tilpasse punkt gitt i en liste.

- **RegEksp(<Liste>)**
Bruker regresjon med en eksponentialfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.
- **RegPoly(<Liste>, <Grad>)**
Bruker regresjon med et polynom av gitt grad for å tilpasse punkt gitt i en liste.
- **RegPot(<Liste>)**
Bruker regresjon med en potensfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.
- **Skjæring(<Objekt>, <Objekt>)**
Finner skjæringspunktene til to objekt (funksjoner, linjer o.l.)
- **Vinkel(<Punkt>, <Toppunkt>, <Punkt>)**
Finner verdien til vinkelen dannet av tre punkt.

Kommandoliste for 1T, R1 og R2

Merk: Denne listen er en fortsettelse av den forrige kommandolisten. Tar du fagene 1T, R1 eller R2 bør du kjenne til kommandoene fra begge listene.

- **acos(<x>)**
I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$ som har cosinus-verdi x .
I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[0, \pi]$ som har cosinus-verdi x .
- **acosd(<x>)**
I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$ som har cosinus-verdi x .
- **asin(<x>)**
I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[-90^\circ, 90^\circ]$ som har sinus-verdi x .
I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som har sinus-verdi x .
- **asind(<x>)**
Gir vinkelen på intervallet $[-90^\circ, 90^\circ]$ som har sinus-verdi x .
- **atan(<x>)**
I algebrafelt: Gir vinkelen på intervallet $[-90^\circ, 90^\circ]$ som har tangens-verdi x .
I CAS: Gir vinkelen på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som har tangens-verdi x .

- `atand(<x>)`
Gir vinkelen på intervallet $[-90^\circ, 90^\circ]$ som har tangens-verdi x .
- `Asymptote(<Funksjon>)`
Finner asymptotene til en funksjon.
- `ByttUt(<Uttrykk>, <Liste med forandringer>)`
Viser et gitt uttrykk etter endring av variabler, gitt i en liste.
- `Deriverte(<Funksjon>)`
Gir den deriverte av en funksjon.
Merk: For en definert funksjon $f(x)$, kan man like gjerne skrive $f'(x)$.
- `Divisjon (<Dividend Polynom >, <Divisor Polynom>)`
Gir kvotienten og resten til en polynomdivisjon.
- `Element(<Liste>, <Posisjonen til elementet>)`
Gir elementet til en liste ut ifra en gitt posisjon.
- `Faktoreriser (<Tall/Polynom>)`
Faktoreriserer et tall/polynom.
- `Høyde(<Objekt>)`
Gir avstanden fra toppunkt til grunnflate i et objekt.
Merk: Avstanden har retning, og derfor kan den noen ganger være negativ.
Tallverdien er den geometriske høyden.
- `HøyreSide (<Likning>)`
Gir høyresiden til en likning.
- `HøyreSide (<Liste med likninger>)`
Gir en liste med høyresidene i en liste med ligninger.
- `Integral (<Funksjon>)`
Gir uttrykket til det ubestemte integralet av en funksjon.
Merk: Hvis kommandoen skrives i inntastingsfeltet, blir konstantleddet utelatt
- `Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)`
Gir det bestemte integralet av en funksjon på et intervall.
- `Integral(<Variabel>)`
Gir uttrykket til det ubestemte integralet til en funksjon av gitt variabel. (Brukes dersom man ønsker å integrere funksjoner avhengig av en annen variabel enn x).

- **Kule**(<Punkt>, <Radius>)
Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.
- **Kurve**(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)
Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x , y og z -koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel.
Merk: Med mindre et bestemt intervall av kurven er ønsket, er det bedre å skrive parameteriseringen direkte inn i inntastingsfeltet som **A+t*u**, hvor A er et punkt på linja og u er en retningsvektor.
- **Linje** (<Punkt>, <Punkt>)
Gir uttrykket til en linje mellom to punkt. Hvis punktene har tre koordinater består uttrykket av et punkt på linja og en fri variabel λ multiplisert med en retningsvektor.
- **Maks**(<Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi>)
Finner absolutt maksimum og maksimalpunkt for en funksjon f på et gitt intervall.
- **Min**
(;Funksjon;, ;Start x-verdi;, ;Slutt x-verdi;) Finner absolutt minimum og minimumspunkt for en funksjon f på et gitt intervall.
- **Nullpunkt**(<Polynom>)
Finner alle nullpunkter til et polynom.
- **NullpunktIntervall**(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)
Finner alle nullpunkter på et gitt intervall til en hvilken som helst funksjon.
- **Plan**(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>)
Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.
- **Prisme**(<Punkt>, <Punkt>, ...)
Framstiller et prisme i Grafikkfelt 3D. **Prisme**[A,B,C,D] lager et prisme med grunnflate ABC og tak DEF , **Prisme**[A,B,C,D,E] har grunnflate $ABCD$ og tak EFG . E , F og eventuelt G blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallelogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafeltet finner man en konstant som oppgir volumet til prismet.

- **Pyramide(<Punkt>, <Punkt>, ...)**
Framstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. $\text{Pyramide}[A,B,C,D]$ lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D , mens $\text{Pyramide}[A,B,C,D, E]$ har grunnflate A, B, C, D og toppunkt E . Under kategorien *Pyramide* i algebrafeltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.
- **RegSin(<Liste>)**
Bruker regresjon med en sinusfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.
- **Skalarprodukt(<Vektor>, <Vektor>)**
Finner skalarproduktet av to vektorer.
Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive $u \cdot v$.
- **Skjæring(<Objekt>, <Objekt>)**
Finner skjæringspunktene mellom to objekter.
- **Skjæring(<Funksjon>, <Funksjon>, <Start>, <Slutt>)**
Finner skjæringspunktene mellom to funksjoner på et gitt intervall.
- **Sum(<Uttrykk>, <Variabel>, <Start>, <Slutt>)**
Finner summen av en rekke med en løpende variabel på et intervall.
- **TrigKombiner(<Funksjon>)**
Skriver om et uttrykk på formen $a \sin(kx) + b \cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r \cos(kx - c)$.
- **TrigKombiner(<Funksjon>, $\sin(x)$)**
Skriver om en funksjon på formen $a \sin(kx) + b \cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r \sin(kx + c)$.
- **Vektor(<Punkt>)**
Lager vektoren fra origo til et gitt punkt.
Merk: I CAS kan man lage vektoren $[x, y]$ ved å skrive (x, y) , dette anbefales.
- **Vektorprodukt(<Vektor>, <Vektor>)**
Finner vektorproduktet av to vektorer.
Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive $u \otimes v$.
- **Vendepunkt(<Polynom>)**
Finner vendepunktene til et polynom.

- `VenstreSide(<Likning>)`
Gir venstresiden til en likning.
- `VenstreSide(<Liste med likninger>)`
Gir en liste med venstresidene i en liste med ligninger.
- `Vinkel(<Vektor>, <Vektor>)`
Gir vinkelen mellom to vektorer. Kan også brukes for vinkel mellom plan/linjer, plan/plan og linje/linje
- `X(<Punkt>)`
Gir x -koordinaten til et punkt.
- `Y(<Punkt>)`
Gir y -koordinaten til et punkt.
- `Z(<Punkt>)`
Gir z -koordinaten til et punkt.

Oppgaver for kapittel 7

7.1.1

Lag en funksjon $f(a, b)$ som

- printer $a \cdot b$.
- printer $a^2 + b^2$. Hva tilsvarende dette tallet hvis a og b er lengdene til katetene i en rettvinklet trekant?
- runder av et desimaltall a til et tall med b desimaler.
- printer om a er større, lik, eller mindre enn b .

7.1.2

Skriv outputen til dette skriptet:

```
1 for i in range(4):  
2     print(i + 2)
```

7.1.3

Skriv outputen til dette skriptet:

```
1 i = 0  
2 while i < 5:  
3     i = i + 2  
4     print(i)
```

7.1.4

Lag et skript som fra en liste med oddetalls antall tall finner

- gjennomsnittet.
- medianen.

Bruk gjerne datasettet fra [oppgave 2.3.2](#) som et utgangspunkt.

7.1.5

Lag et skript som fra en liste med partalls antall tall finner

- a) gjennomsnittet.
- b) medianen.

Bruk gjerne datasettet fra [oppgave 2.3.4](#) som utgangspunkt.

7.2.1

- a) Lag et sektordiagram for datasettet fra [oppgave 2.3.6](#).
- b) Lag et sektordiagram for datasettet fra [oppgave 2.3.7](#).

7.2.2

Løs [oppgave 4.3.4](#) og [oppgave 4.4.1](#).

7.2.3

a) Sett opp et serielån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt? (Summen av alle terminbeløpene.)

7.2.4

a) Sett opp et annuitetslån hvor:

- Lånesummen er 300 000 kr
- Renten er 2,1%
- Lånet skal betales med 15 årlige terminbeløp, som er 23 523 kr.

Avrund alle kronebeløp til hele kroner.

b) Hvor mye koster lånet totalt?

c) Sammenlign svaret du fikk i oppgave b) med svaret fra oppgave 7.2.3b, hvilket lån koster mest penger?

7.2.5

Sjekk at du i oppgave [oppgave 7.2.3](#) og [oppgave 7.2.4](#) har fått samme svar som nettsiden laanekalkulator.no. (Velg *Tinglysning: Ingen* og sett alle gebyrer til 0).

7.3.1

a) Skriv den lineære funksjonen $f(x) = 2x + 4$ og linja $y = 2x + 2$ inn i GeoGebra. Lag $f(x)$ blå og y grønn. Hva ser du ut ifra grafen til de to linjene?

b) Finn verdien til $f(x)$ når $x = 4$.

c) Finn verdien til y når $x = -3$.

7.3.2

a) Tegn punktene $(-1,2)$ og $(2,8)$.

b) Finn uttrykket til linja som går gjennom disse punktene.

7.3.3

a) Skriv inn funksjonen $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) Finn $f(4)$.

c) Finn nullpunktene til $f(x)$.

d) Finn bunnpunktet til $f(x)$.

e) Finn skjæringspunktet mellom $f(x)$ og linja $y = 5$.

Gruble 9

Lag et skript som fra en liste med tall finner

- a) gjennomsnittet.
- b) medianen.
- c) typetallet.

Undersøk svarene fra [oppgave 2.3.1 - 2.3.4](#) med sriptet.

Kapittel 8

Numeriske metoder

8.1 Newtons metode

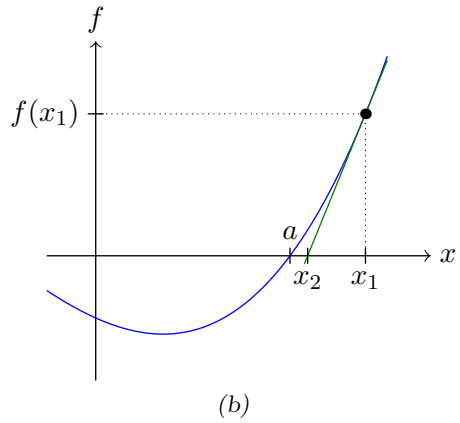
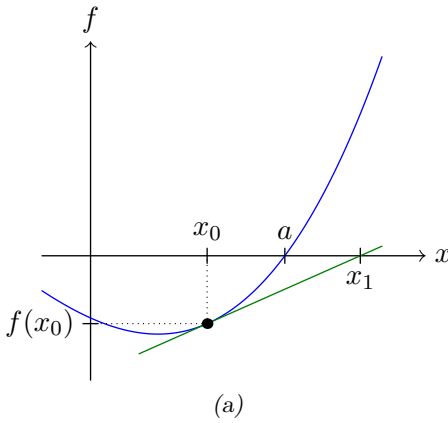
Gitt en funksjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Ved **Newton's metode** gjør vi denne antakelsen for å en tilnærming a :

La x_1 være skjæringspunktet mellom x -aksen og tangenten til f i x_0 . Vi antar da at $|x_1 - a| < |x_0 - a|$. Sagt med ord antar vi at x_1 gir en bedre tilnærming for a enn det x_0 gjør.

Siden x_1 er skjæringspunktet mellom x -aksen og tangenten til f i x_0 , har vi at²

$$\begin{aligned}f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) &= 0 \\f'(x_0)x_1 &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

²Se oppgave??



La x_2 være skjæringspunktet mellom x -aksen og tangenten til f i x_1 . Ved å gjenta prosedyren vi brukte for å finne x_1 , kan vi finne x_2 , som vi antar er en enda bedre tilnærming for a enn x_1 . Prosedyren kan vi gjenta fram til vi har funnet en x -verdi som gir en tilstrekkelig¹ tilnærming til a .

¹Hva som er en *tilstrekkelig tilnærming* er det opp til oss selv å bestemme.

8.1 Newtons metode

Gitt en funksjon $f(x)$ si at vi ønsker å finne et tall a slik at $f(a) = 0$. Gitt x -verdiene x_n og x_{n+1} for $n \in \mathbb{N}$. Ved å bruke formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

antas det at x_{n+1} gir en bedre tilnærming for a enn x_n .

Språkboksen

Newton's metode kalles også **Newton-Rhaphos metode**.

Når er tilmærmingen god nok?

Newton's metode beskriver en iterasjonsprosess som man håper at nærmer seg en verdi. Hvis metoden lykkes, vil x_{n+1} og x_n etterhvert være veldig like, og slik kan en grense for hvor liten $|x_{n+1} - x_n|$ kan være fungere som et godt mål for når iterasjonsprosessen skal stoppe.

8.2 Trapesmetoden

Gitt en funksjone $f(x)$. Integralet $\int_a^b f dx$ kan vi tilnærme ved å

1. Dele intervallet $[a, b]$ inn i mindre intervall. Disse kaller vi **delintervall**.
2. Finne en tilnærmet verdi for integralet av f på hvert delintervall.
3. Summere verdiene fra punkt 2.

I figur 8.1a har vi 3 like store delintervaller. Hvis vi setter $a = x_0$ og $\Delta x = \frac{b-a}{3}$, betyr dette at

$$x_1 = x_0 + \Delta x \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x \quad x_3 = x_0 + 3\Delta x = b$$

En tilnærmet verdi for $\int_a^{x_1} f dx$ får vi ved å finne arealet til trapeset med hjørner (husk at $x_0 = a$)

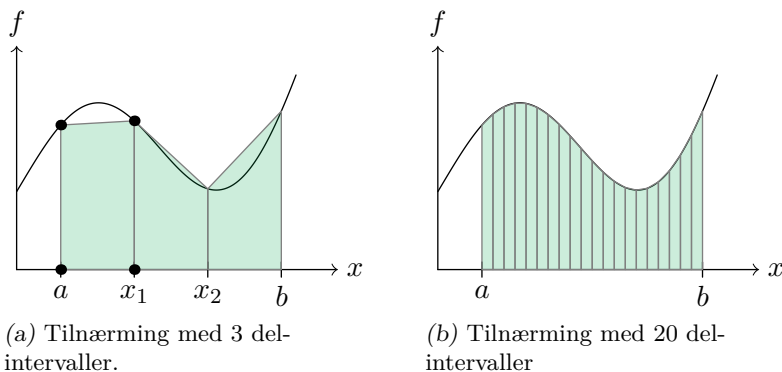
$$(x_0, 0) \quad (x_1, 0) \quad (x_1, f(x_1)) \quad (x_0, f(x_0))$$

Dette arealet er gitt ved uttrykket

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)] = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Ved å tilnærme integralet for hvert delintervall på denne måten, kan vi skrive

$$\int_a^b f dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$



Figur 8.1

8.2 Trapesmetoden

Gitt en integrerbar funksjon f . En tilnærmet verdi for $\int_a^b f dx$ er da gitt som

$$\int_a^b f dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \quad (8.1)$$

hvor

$$n \in \hat{\mathbb{N}}$$

$$a = x_0$$

$$b = x_n$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_{n+1} = x_0 + i\Delta x$$

Merk

Slik [regel 8.2](#) er formulert, vil $[a, b]$ være delt inn i n delintervaller.

Oppgaver for kapittel 8

8.2.1

Gitt likningen

$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0$$

- Hvorfor vil ikke Newtons metode fungere viss du starter med $x_0 = 0$?
- Lag et skript som finner tilnærminger for de tre løsningene av likningen. Stopp søket når $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$.

8.3.1

Forklar hvorfor (8.1) også kan skrives som

$$\int_a^b f dx \approx \Delta x \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right)$$

8.3.2

I [TM2](#) har vi sett at det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (8.2)$$

hvor $x_i = a + (i - 1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. La I_n være tilnærmingen av I gitt ved å la n være et gitt tall. Implementer I_n i et skript, og bruk integralet $\int_0^1 3x^2 dx$ til å sjekke at du får output som forventet.

8.3.3

Hvis funksjonen du skal integrere er konkav, vil trapesmetoden gi et overestimat eller et underestimat?

Gruble 10

Trapesmetoden kan også implementeres slik at delintervallene ikke nødvendigvis har samme bredde. Forklar hvorfor (8.1) da kan skrives som

$$\int_a^b f dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Gitt funksjonen

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sin(\pi x) \quad x \in [0, 2]$$

- a) Bruk (for eksempel) GeoGebra til å tegne grafen til f .
- b) Du skal bruke trapesmetoden for å tilnærme $\int_0^2 f dx$, men får bare lov til å dele $[0, 2]$ inn i tre delintervaller. Det er naturlig at $x = 0$ og $x = 2$ er med i hvert sitt delintervall. Forklar hvorfor de to x -verdiene som løser likningen

$$x + \pi \cos(\pi x) = 0$$

også er gode kandidater til å være med i delintervallene.

- c) Bruk Newtons metode til å finne x -verdiene du ønsker. Stopp søket når $|x_n - x_{n+1}| \leq 10^{-6}$.

Gruble 11

I MB har vi vist at¹ hvis s_n er sidelengden til en regulær mangekant med n sider, innskrevet i en sirkel med radius 1, har vi at

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

a) Lag et skript som finner sidelengden til en regulær 768-kant når du vet at $s_6 = 1$. Bruk s_{768} til å finne en tilnærmet verdi for omkretsen til en sirkel med radius 1.

b) Vis at

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

c) Når man utfører numeriske beregninger er det alltid en utfordring at differansen mellom to tall som er veldig like, blir ”satt” til 0 av datamaskinen. Drøft hvilke av de to gitte uttrykkene for s_{2n} som er best egnet til en numerisk approksimasjon av π .

d) Skriv to versjoner av skriptet fra oppgave a), slik at skriptene bruker hvert sitt uttrykk av s_{2n} . Kjør skriptene med minst 30 iterasjoner. (Hvor mange iterasjoner du må ha for å se noe merkelig avhenger av hvilken datamaskin du bruker).

Gruble 12

Gitt integralet

$$I = \int_0^2 x^3 - 5x + 6 dx$$

La I_n være integralet tilnærmet ved trapesmetoden med n delintervaller.

a) Beregn I_{10} og I_{100} og I_{1000}

b) La $E_n = I - I_n$

c) Bruk regresjon til å finne den best tilpassede polynomfunksjonen for punktene $(\frac{1}{n}, E_n)$, $n \in [10, 100, 1000]$.

¹Se forklaringen av omkretsen til en sirkel.

Kapittel 9

Blandende oppgaver

9.1 Oppgaver med tall og situasjoner fra virkeligheten

Se også oppgaver på ekte.data.uib.no

Oppgaver for grunnskole og P-fagene

9.1.1

Vanlig gåfart regnes for å være ca. 1,5 m/s. Hvor langt kommer man med denne farten

- a) etter 25 min?
- b) etter 3 timer?

9.1.2

#overslag #proporsjonalitet

Når det er lyn og torden kan du bruke følgende metode for å finne ut omtrent hvor langt unna du er uværet:

Start med å telle sekunder straks du ser et lyn. Stopp tellingen når du hører torden. Gang antall sekunder med 300, da har du et overslag på hvor mange meter du er unna uværet.

Bruk internett til undersøke hastigheten til lys (lyn) og lyd (torden) i luft, og forklar hva denne metoden baserer seg på.

9.1.3

#prosent #negative tall #tekstforståelse

Statens vegvesen definerer **stigningsgrad** slik:

Stigningsgrad er definert som høydeforskjell dividert med horisontal avstand i vegens lengderetning. Stigningsgraden uttrykkes vanligvis i %. Den er positiv i stigning og negativ i fall sett i profileringsretningen.

Ved starten av bratte veistrekker bruker det å stå skilt som varsler om veiens stigningsgrad.

Si at stigningen på et veistrekke starter 2 meter over havet, og slutter 10 meter over havet, og at veistrekket er 100 meter i horisontal retning.

- Hva er stigningsgraden til dette veistrekket?
- Hva menes med at stigningsgraden er ”negativ i fall sett i profileringsretningen”?

9.1.4

modellering # areal

Gitt et rektangel med omkrets 4, og la x være den éne sidelengden.

- Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser arealet til rektangelet.
- Hva er x når rektangelet har størst areal? Hvilken form har rektangelet da?

Merk: I [oppgave 9.1.19](#) finner du en *generalisert* utgave av denne oppgaven. Med andre ord kan det vises at formen du finner i oppgave b) alltid vil være den formen et rektangel må ha for å ha et størst mulig areal i forhold til omkretsen.

9.1.5

#programmering #printall

Skriv et skript som lykkes i å finne alle primtall på intervallet 1-100.

9.1.6

omgjøring av enheter # standardform # proporsjonale størrelser

Lysets hastighet i vakuum er tilnærmet lik $3 \cdot 10^8$ km/s.

- Et **lysår** angir distansen et objekt vil reise hvis det beveger seg med lysets hastighet i ett år. Hvor langt er et lysår?
- Lys bruker ca. 8 minutt på å bevege seg fra Sola til Jorda. Hvor langt er det mellom Sola og Jorda?

9.1.7

omgjøring av enheter # standardform # proporsjonale størrelser

Det har blitt populært å regne ut hva det koster å ta seg en dusj. Til et slikt reknestykke kan man gjøre følgende antakelser:

- Energien som kreves er energien som må til for å varme opp vannet som gikk med til dusjingen fra 7° til 35° .
- For å øke temperaturen til 1 liter vann med 1° , kreves det $4,2 \cdot 10^3$ J.

Ifølge vg.no er 645,26 øre/kWh den høyeste (gjennomsnittlige) strømprisen registrert i Oslo.

- Regn ut hva en dusj på 10 minutter ville kostet med denne prisen.
- Bruk internett til å finne strømprisene for din region i dag. Sjekk hva en 10 minutters dusj vil koste deg.

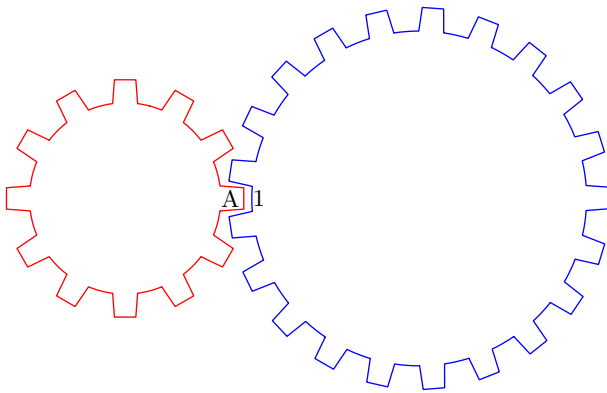
*Obs! I denne oppgaven ser vi bort ifra **nettleie**. Alle strømforbrukere må betale nettleie for frakt av strøm, og jo mer strøm man forbruker, jo høyere vil nettleien være, men strømprisen vil ha mest å si for hvor mye en dusj koster.*

9.1.8

#faktorisering #primtall

I et system hvor to tannhjul virker sammen, er det ønskelig at en tann og et kammer møtes så sjeldent som mulig. Dette for å unngå slitasje.

- Et tannhjul med 12 tenner er koblet til et tannhjul med 21 tenner, som vist i figuren under. Hvor mange omdreininger må det røde tannhjulet ta for at tann A og kammer 1 skal møtes igjen?
- Gjenta spørsmålet fra oppgave a), men hvor det blå tannhjulet er erstattet med et tannhjul som har 11 tenner?¹.
- Hvis to tall ikke har noen annen felles faktor enn 1, sier vi at de er **relativt primiske**. Hvorfor er systemer med tannhjul helst innrettet slik at antall tenner på de forskjellige tannhjulene er relativt primiske?



¹Legg merke til at antall tenner og antall kammer alltid vil være like

Hvis en størrelse har veldig høy verdi, kan det være lettere å forestille seg omfanget til størrelsen ved å sammenligne den med en konkret størrelse (i motsetning til å bruke SI-enhetene gram, meter og lignende). Oppgave 9.1.9 - 9.1.11 handler om slike sammenligninger.

9.1.9

#enheter #regning #

Ifølge [WWF](#) kan en blåhval veie opp til 200 tonn, og ifølge [geno.no](#) kan en norsk NRF-ku veie opp til 650 kg. Hvor mange NRF-kyr tilsvarer vekten av én blåhval?

9.1.10

#proporsjonale størrelser #volum #overslag

Vannføringen i en elv viser til volumet vann en elv frakter per tidsenhet. I en [Wikipedia](#)-artikkel om verdens største elver kan man lese følgende:

(...) The average flow rate at the mouth of the Amazon is sufficient to fill more than 83 such pools each second.

Norsk oversettelse

(...) Den gjennomsnittlige vannføringen i munningen av Amazonas-elven er nok til å fylle mer enn 83 slike per sekund.

Gjengi utregningene som er brukt for å finne de to tallene i teksten over, når du vet at artikkelen har brukt følgende som utgangspunkt:

- Bassenget det er snakk om er et olympisk svømmebasseng, som har lengde 50 m, bredde 25 m og dybde 2 m.
- Den gjennomsnittlige vannføringen i Amazonas-elven er $209\,000\text{ m}^3/\text{s}$.

9.1.11

#enheter #areal #overslag #proporsjonale størrelser

I en nyhetssak skrevet av [CNN](#) i 2020 står følgende¹:

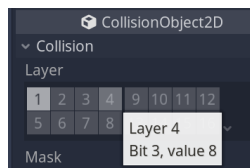
The world lost 3.8 million hectares of tropical primary forest in 2019 – equivalent to a football pitch every six seconds – according to a new report published Tuesday.

Ta utgangspunkt i tallet ”3.8 million”, undersøk størrelsene ”hectares” og ”foobtall pitch”, og avgjør om denne påstanden er riktig.

9.1.12

#programmering #potenser

I spillmotoren [Godot](#) har noen objekter egenskapen ”Layer”. Dette brukes til å bestemme hvilke objekter som skal/ikke skal kollideres med hverandre.



Layers kan bestemmes i editoren, men det er også ønskelig å bruke kode for å endre på disse underveis i et spill. Hvert layer er representert ved en ”Bit”, som viser til en potens med 2 som grunntall og ”Bit” som eksponent. Verdien til ”Bit” er alltid 1 mindre enn verdien til ”Layer”. For eksempel, ”Layer 4” har ”Bit 3” og ”value 8” (fordi $2^3 = 8$).

- Hvilken ”value” har ”Layer 8”?
- For å kode hvilke layers et objekt skal ha, brukes funksjonen `set_collision_layer(value)`, hvor `value` er summen av verdiene til hvert layer som ønskes valgt.

Hva må `value` settes til dersom du ønsker at et objekt skal ha ”Layer 1”, ”Layer 3” og ”Layer 7”?

- Hvis `value = 320`, hvilke layers har objektet da?

¹Rapporten det vises til er en rapport fra [Global Forest Watch](#)

9.1.13

#algebra #modellering #andregradsfunksjon
#omgjøring av enheter #proporsjonalitet

La F være summen av kreftene som virker i motsatt retning av en bils kjøreretning. Ifølge en rapport¹ fra SINTEF kan² F tilnærmes som

$$F(v) = mgC_r + \frac{1}{2}\rho v^2 D_m \quad , \quad v \geq 10$$

	betydning	verdi	enhet
v	bilens hastighet	variabel	m/s
m	bilens masse ³	1409	kg
g	tyngdeakselerasjonen	9.81	m/s ²
C_r	koeffisient for bilens rullemotstand	0.015	
ρ	tettheten til luft	1.25	kg/m ³
D_m	koeffisient for bilens luftmotstandsareal ⁴	0.74	

- a) Tegn digitalt grafen til F for $v \in [10, 35]$
- b) På intervallet gitt i oppgave a, for hvilken hastighet er det at
- rullemotstanden gir det største bidraget til F ?
 - luftmotstanden gir det største bidraget til F ?

Oppgi svarene rundet av til nærmeste heltall og målt i km/h.

- c) Med ”energiforbruk”⁵ mener vi her den energien som må til for å motvirke F over en viss kjørelengde. Ved konstant hastighet er energiforbruket etter kjørt lengde proporsjonal med F . På norske motorveier er 90 km/h og 110 km/h vanlige fartsgrenser. Hvor stor økning i energiforbruk vil en økning fra 90 km/h til 110 km/h innebære?

¹<https://sintef.brage.unit.no/sintef-xmlui/handle/11250/2468761>

²Det er her forutsatt flatt strekke, og sett vekk ifra motstand ved akselerasjon.

³Det er tatt utgangspunkt i gjennomsnittsvekten til en norsk personbil.

⁴Verdien er hentet fra en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient#Drag_area

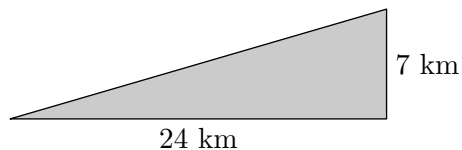
⁵Den totale energimengden en bil bruker på en kjørelengde vil være høyere enn det vi har kalt ”energiforbruket”. Som regel vil den totale energimengden som kreves for å kjøre en strekning være høyere jo høyere hastighet man har. Slik kan man anta at differansen i energiforbruk vi finner i denne oppgaven er et minimum for den reelle differansen i total energimengde.

- d) Lag en funksjon F_1 som gir F ut ifra bilens hastighet målt i km/h.

9.1.14

#Pytagoras' setning #overslag, #prosent #forhold

En bil skal kjøre opp en bakke som vist på figuren under.



- a) Gjør et overslag over stigningsgraden til bakken. (Se [oppgave 9.1.3](#))

Fartsgrensen i bakken er 50 km/h. Bilen bruker 24 minutter på å kjøre opp bakken.

- b) Argumenter for om bilen har brutt fartsgrensen eller ikke.



Artig å vite

Baldwin Street in Dunedin, New Zealand, er kjent som verdens bratteste bilvei. Stigningsgraden til denne bakken er 37,5%.

Oppgaver for 1T, R1 og R2

9.1.15

#rekker #økonomi

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2% månedlig rente. Du sparer ved å gjøre et innskudd på 1000 kr hver måned.

- a) Skriv rekken som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på 5. måned med sparing. Innskuddet i 5. måned skal tas med.
- b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken når du starter på n -te måned med sparing. Innskuddet i n -te måned skal tas med.

9.1.16

#rekker #økonomi # programmering

Si at du låner 1 500 000 kroner av en bank. Lånet er et annuitetslån (se [AM1](#)) med 3% årlig rente, og lånet skal betales ned i løpet av 20 år med årlige fradrag og renter.

- a) Finn verdien til terminbeløpet x .
- b) Lag et script som printer terminbeløp, avdrag og renter for hele nedbetalingstiden, og som bekrefter at svaret ditt fra a) er rett.
- c) Sammenlign svaret ditt med en lånekalkulator¹ på internett. (Sett alle gebyrer lik 0).

¹laanekalkulator.no er ryddig og fin, men obs!, inneholder annonser.

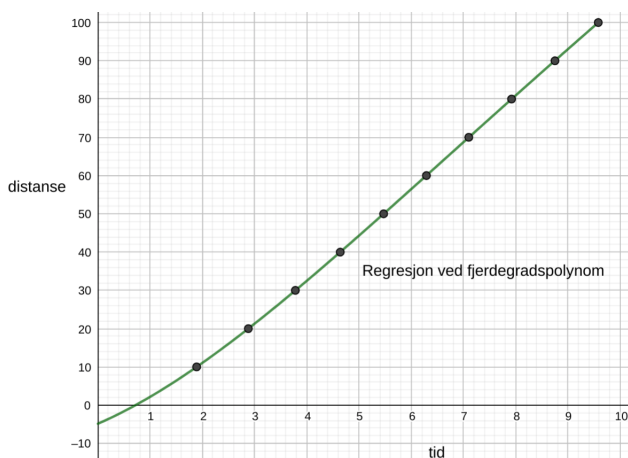
9.1.17

#regresjon #funksjonsdrøfting #omgjøring av enheter

Usain Bolt har verdensrekorden for 100 m sprint. I tabellen under ser du hva tidtakeren viste ved hver 10. meter under dette rekordløpet.

meter	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
sekunder	1.89	2.88	3.78	4.64	5.47	6.29	7.1	7.92	8.75	9.58

- a) I figuren under har vi brukt datasettet fra tabellen til å utføre regresjon med et fjerdegradspolynom. Hva er det som er helt feil med denne tilnærmingen?



- b) I datasettet kan vi legge til et punkt som vil hjelpe med å korrigere feilen poengtert i a). Hvilket punkt er dette?
- c) Bruk regresjon med et fjerdegradspolynom på datasettet fra b).
- d) Ut ifra funksjonen du fant i c), hva var toppfarten til Bolt under dette løpet?
- e) Bruk datasettet fra b) til å finne gjennomsnittsfarten til Bolt for $t \in [0, 1.89]$ og for $t \in [1.89, 9.58]$. Sammenlikn disse hastighetene med svaret fra oppgave d), og drøft årsaken til ulikhetene/likhetene.

9.1.18

#funksjoner #regresjon #derivasjon #vektorer i planet

På side 26 i dokumentet [Premisser for geometrisk utforming av veger](#) (utformet av Statens vegvesen) er minste **horisontalkurve-radius** $R_{h,\min}$ gitt ved formelen

$$R_{h,\min} = \frac{V^2}{127(e_{\max} + f_k)}$$

hvor

V = fartsgrense

e_{\max} = maksimal overhøyde

f_k = dimensjonerende sidefriksjonsfaktor

Si at en veibane er beskrevet av grafen en funksjon $f(x)$. I vedlegg ?? i [TM1](#) introduserte vi sirkelen som beskriver krumningen til f . Vektoren mellom sentrum S i denne sirkelen og et punkt $A = (x, f(x))$ på grafen til f er gitt som

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''} [-f \cdot (1 + (f')^2), 1 + (f')^2]$$

La r være radien til sirkelen som beskriver krumningen til f . Statens vegvesens krav tilsier at

$$r < R_{h,\min}$$

Bruk et digitalt kart og regresjon til å finne en polynomfunksjon som gir en god tilnærming for utvalgte veistykker hvor fartsgrensen er kjent. Sett $e_{\max} = 0$, og bruk tabellen¹ under for å velge verdien til f_k . Undersøk om krumningen til veistykket oppfyller kravet til Statens vegvesen i alle punkt.

Tabell 2.7: Sidefriksjon for ulike fartsgrenser og sikkerhetsfaktorer

Sikkerhetsfaktor	Fartsgrense [km/t]							
	40	50	60	70	80	90	100	110
1,00	0,249	0,224	0,195	0,182	0,157	0,131	0,108	0,079
1,10	0,226	0,204	0,178	0,165	0,143	0,119	0,098	0,072

¹Hentet fra side 22 fra nevnte dokument.

9.1.19

modellering # areal # derivasjon

Gitt et rektangel med omkrets O , og la x være den éne sidelengden.

- Finn uttrykket til funksjonen $A(x)$, som viser arealet til rektangelet.
- Hvilken form har rektangelet når arealet er størst?

9.1.20

#logaritmer #overslag

Momentmagnitudeskalaen er en skala som brukes til å representere styrken på jordskjelv. Hvis S er det målte **seismiske momentet** til jordskjelvet, er masse­magnituden M_w gitt som¹

$$M_w = \frac{2}{3} \log S - 10.7$$

Energien som jordskjelvet utløser er tilnærmet proporsjonal med S .

Gitt to jordskjelv, jordskjelv A og jordskjelv B , med henholdsvis seismisk moment S_A og S_B . Si videre at proporsjonalitetskonstanten for energi utløst av det seismiske momentet er likt for begge jordskjelvene. Hvis jordskjelv A er målt til 1 mer enn jordskjelv B på momentmagnitudeskalaen, hva er da forholdet mellom energi utløst av jordskjelv A og energi utløst av jordskjelv B ?

¹Kilde: [Wikipedia](#).

9.1.21

Du skal prøve å kaste en ball så langt som mulig langs et flatt strekke. Posisjonen ballen har idét den forlater handen din setter du til $(0, 0)$. Ved å anta at tyngdekraften deretter er den eneste kraften som virker på ballen, er posisjonen til ballen godt tilnærmet ved uttrykket

$$\vec{p}_g(t) = \vec{v}t - [0, 5t^2]$$

hvor $\vec{v} = [v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta]$ er hastighetsvektoren til ballen idét den forlot handen, og t er antall tidsenheter etter at ballen har forlatt handen. Idét ballen forlater handen din har den farten v_0 , \vec{v} danner vinkelen θ med horisontallinjen.

Ut ifra \vec{p}_g , hvilken verdi må θ ha for at kastet skal bli lengst mulig?

9.1.22

integrasjon # derivasjon

La funksjonen $s(t)$ beskrive hvor langt et objekt har beveget seg etter tiden t . Hvi objektet har konstant akselerasjon a , har vi at

$$s''(t) = a$$

- Integrer $s''(t)$ to ganger slik at du ender opp med et uttrykk for $s(t)$.
- Bestem uttrykkene for $s(t)$ og $s'(t)$ når du vet at $s(t) = 0$ og $s'(t) = v_0$.
- Hvilken fysisk størrelse representerer $s'(t)$?
- Undersøk begrepet "bevegelsesligninger"¹ (også kalt "veiformler") i en fysikkbok eller på internett. Sammenlign uttrykkene du finner med uttrykket du fant for $s(t)$.

¹"Equations of motion på engelsk.

9.1.23

#vektorer i planet #derivasjon

Posisjonen \vec{s} til et objekt som beveger seg i en sirkelbane kan uttrykkes som

$$\vec{s} = r[\cos(2\pi ft), \sin(2\pi ft)]$$

hvor r er radien til sirkelbanen, t er tiden og f er frekvensen.

- f beskriver antall runder objektet fullfører per tidsenhet¹. Forklar hvorfor $2\pi f$ kalles **vinkelfarten** til objektet.
- Finn $\vec{s}'(t)$.
- Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}'(t)$?
- Bestem lengden til $\vec{s}'(t)$
- Finn $\vec{s}''(t)$.
- Bestem lengden til $\vec{s}''(t)$
- Hva er vinkelen mellom $\vec{s}(t)$ og $\vec{s}''(t)$? Peker $\vec{s}''(t)$ innover i sirkelbanen eller ut fra sirkelbanen?
- Bruk en fysikkbok eller internett til å undersøke begrepet **sentripetalakselerasjon**. Sammenlign funnene dine i denne oppgaven med informasjonen du finner.

¹Hvis tidsenheten er 'sekund', har f benevnningen '1/sekund'.

9.1.24

trigonometri

En tilnærming for høy- og lavvann i Molde er gitt ved funksjonen

$$f(x) = 128 + 80 \cos\left(\frac{3\pi}{37}x\right)$$

hvor f angir cm over sjøkartnull¹ t timer etter et gitt referansetidspunkt. Referansetidspunktet er valgt slik at det ved $t = 0$ var høyvann (flo).

- a) Hva er vannstanden i Molde når det er lavvann (fjøre)?
- b) Hvor lang tid er det mellom flo og fjøre?

Merk: Denne oppgaven kan med fordel løses uten digitale hjelpemidler.

¹Sjøkartnull er som regel satt til den laveste vannstanden som kan oppnås ut ifra astronomiske betingelser (flo og fjære er i stor grad betinget av hvordan jorda, sola og månen står i forhold til hverandre).

9.2 Praktiske oppgaver

Oppgaver for grunnskole og P-fagene

Se også oppgaver på mattelist.no

9.2.1

#prosentregning

Bruk internett til å finne fem varer hvor du har oppgitt følgende:

- En original pris og en prosentvis rabatt av denne prisen.
- Den nye prisen etter at rabatt er trekt ifra.

Undersøk om den nye og den originale prisen samsvarer med rabatten for disse fem varene.

9.2.2

Utfør fem stille lengde hopp¹. Finn gjennomsnittslengden og medianlengden for hoppene dine.

9.2.3

Finn en 20 cm linjal og og noen små viskelær med lik størrelse. Legg linjalen på et bord slik at 10 cm av linjalen ligger utenfor kanten av bordet.

- a) Legg et viskelær på linjalmerket for 5 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten?
- b) Stable 2 viskelær på linjalmerket for 5 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten?
- c) Stable 8 viskelær på linjalmerket for 2 cm. Hvor langt ut på linjalen kan du plassere et annet viskelær før linjalen bikker over kanten? Prøv å svare på spørsmålet før du sjekker svaret i praksis.

¹Stille lengde betyr at man skal hoppe med samlede bein, og uten å ta springfart først.

9.2.4

#prosent #geometri #algebra #gjennomsnitt

- a) Beskriv en metode for hvordan du ved hjelp av en vater og et målband/linjal kan bestemme stigningen på et strekke i en bakke.

For en bakke som har jevn stigning kan man anslå stigningen på følgende måte

1. Lag et merke 5 meter nedenfor et annet merke i bakken. (De 5 metrene måles langs bakken.)
2. Mål tiden en fotball bruker på å rulle fra det øverste til det nederste merket. Pass på å la ballen trille uten å gi den ekstra fart ved skubbing.
3. Regn ut gjennomsnittsfarten til ballen mellom de to merkene.
4. Høgdeforskjellen h mellom de to merkene kan nå tilnærmes ved formelen

$$h = \frac{v^2}{19}$$

hvor v er gjennomsnittsfarten fra punkt 3. ganget med 2.

5. La l være den horisontale (vannrette) avstanden mellom de to punktene. Da er

$$l = \sqrt{5^2 - h^2}$$

6. Den tilnærmede verdien til stigningen er gitt ved brøken $\frac{h}{l}$.
- b) Forklar formelen for l fra punkt 5.
- c) Finn en bakke og sammenlign resultatene fra metoden med en vater og metoden med en fotball.

9.2.5

Makspuls er et mål på hvor mange hjerteslag hjertet maksimalt kan slå i løpet av et minutt. På siden [trening.no](https://www.trening.no) kan man lese dette:

”Den tradisjonelle metoden å estimere maksimalpuls er å ta utgangspunkt i 220 og deretter trekke fra alderen.”

a) Kall ”maksimalpuls” for m og ”alder” for a og lag en formel for m ut i fra sitatet over.

b) Bruk formelen fra a) til å regne ut makspulsen din.

På den samme siden kan vi lese at en ny og bedre metode er slik: ”Ta din alder og multipliser dette med 0,64. Deretter trekker du dette fra 211.”

c) Lag en formel for m ut ifra sitatet over.

d) Bruk formelen fra c) til å regne ut makspulsen din.

For å fysisk måle makspulsen din kan du gjøre dette:

1. Hopp opp og ned i ca. 30 sekunder (så fort og så høyt du greier).
2. Tell hjerteslag i 15 sekunder umiddelbart etter hoppingen.

e) Kall ”antall hjerteslag i løpet av 15 sekunder” for A og lag en formel for m .

f) Bruk formelen fra e) til å regne ut makspulsen din.

g) Sammenlign resultatene fra b), d) og f).

9.2.6

I matbutikker er som regel både pris og kilopris oppgitt for en vare. Vekten til varen finner man på forpakningen til varen. Gå i din lokale matbutikk og velg ut fem varer. Sjekk om kiloprisen som butikken oppgir er rett for disse varene.

9.2.7

På nettsiden viivilla.no får vi vite at dette er formelen for å lage en perfekt trapp:

”2 ganger opptrinn (trinnhøyde) pluss 1 gang inntrinn (trinndybde) bør bli 62 centimeter (med et slingringsmonn på et par centimeter).”

- a) Kall ”trinnhøyden” for h og ”trinndybden” for d og skriv opp formelen i sitatet (uten slingringsmonn).
- b) Sjekk trappene på skolen/i huset ditt, er formelen oppfylt eller ikke?
- c) Hvis ikke: Hva måtte trinnhøyden vært for at formelen skulle blitt oppfylt?
- d) Skriv om formelen til en formel for h .

Oppgaver for 1T, R1 og R2

9.2.8

#regresjon #derivasjon # funksjonsdrøfting

- Sett opp 11 kjepler med 10 meters avstand.
- Ta video av at du springer 100-meteren så fort du kan.
- Bruk videoen og regresjon til å finne en funksjon som gir en god beskrivelse av 100-meteren din.
- Hva var gjennomsnittsfarten din?
- Hva var toppfarten din?
- På hvilket tidspunkt hadde du størst akselerasjon?

9.2.9

#trigonometri

Sett en gjenstand på enden av en planke, og vipp enden varsomt oppover fram til gjenstanden starter å renne nedover planken. Vinkelen hvor bevegelsen starter kalles **friksjonsvinkelen**. Finn friksjonsvinkelen for tre forskjellige gjenstander. Undersøk om friksjonsvinkelen endres hvis gjenstandene og/eller planken våtes. Friksjonsvinkelen skal du finne bare ved å måle hvor høyt planken er vippet, og lengden til planken.

9.2.10

#integrasjon #regresjon #omdreiningslegemer

Finn forskjellige gjenstander det går an å helle vann i. Bruk regresjon og teorien om omdreiningslegemer til å finne en tilnærming for volumet til gjenstanden. Undersøk hvor godt tilnærmingen svarer til virkeligheten.

9.3 Eksamensoppgaver

Dette er oppgaver som har blitt gitt ved sentralt utformet eksamen i Norge. Oppgavene er laget av Utdanningsdirektoratet. Forkortelser i parentes viser til følgende:

E	Eksempeloppgave
V/H	Eksamen fra vårsemesteret/høstsemesteret
G/1P/1T/R1/R2	Fag
XX	År 20XX
D1/D2	Del 1/Del 2

Tekst og innhold kan her være noe endret i forhold til originalen.

9.3.1 (GE22)

#regning #omgjøring av enheter

Snorre skal kjøpe ny mobiltelefon. Ved betaling får han to alternativer:

- Alternativ 1: Betal 12 000 kr med en gang
- Alternativ 2: Betal 550 kr per måned i to år.

Snorre velger alternativ 2.

Hvor mye dyrere blir mobiltelefonen med *alternativ 2* enn med *alternativ 1*?

9.3.2 (GV21D1)

#regnerekkefølge #potenser

Regn ut $3(2 + 5) - 3^2$

9.3.3 (GV21D1)

pi #rottuttrykk #desimaltall #brøk

Sorter tallene fra størst til minst

$$3,1 \quad \sqrt{9} \quad 2,9 \quad \pi \quad \frac{32}{10}$$

9.3.4 (GV21D1)

#kobinasjonsregning #logikk

Det er 29 bokstaver i alfabetet vårt, og tallsystemet vi vanligvis bruker, har 10 siffer. Du skal lage en kode med seks tegn. De to første skal være bokstaver, og de fire neste skal være siffer. En slik kode kan for eksempel være YA6505.

Hvilket av tallene under gir antall ulike koder det er mulig å lage?

- a) 290 b) 2320 c) 4 092 480 d) 8 410 000

9.3.5 (GV21D1)

#ligninger #formler

Sett $n = 120$, og bestem verdien av p i formelen nedenfor.

$$n = 12p + 48$$

9.3.6 (GV21D1)

#enheter #regning

En løpebane på en friidrettsbane er 400 meter. Cornelia løper 6 runder. Hvor langt løper Cornelia?

Merk: I eksamenssettet er dette den første av to deloppgaver. Den andre deloppgaven er altså utelatt her.

9.3.7 (1PV22D1)

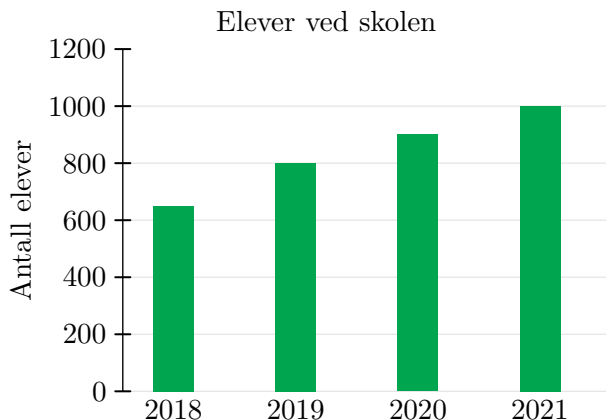
#programmering #prosentregning

```
1 startverdi = 2000
2 verdi = startverdi
3 vekstfaktor = 1.05
4 år = 0
5
6 while verdi < startverdi*2:
7     verdi = verdi*vekstfaktor
8     år = år + 1
9
10 print(verdi)
11 print(år)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor. Hva ønsker eleven å finne ut? Forklar hva som skjer når programmet kjøres.

9.3.8 (1PV22D1)

#prosentregning #statistikk #tallforståelse



Diagrammet viser antall elever ved en videregående skole de fire siste årene.

Når var det størst prosentvis økning i antall elever fra et år til det neste?

9.3.9 (1PV23D1)

#standardform

Tall fra FN viser at folketallet på jorda nå har passert 8 milliarder.

Forskere har kommet fram til at det er omtrent 2,5 millioner ganger så mange maur som mennesker på jorda.

Omtrent hvor mange maur er det på jorden? Skriv svaret på standardform.

9.3.10 (1PV23D1)

- Gi et eksempel på en praktisk situasjon der to størrelser er proporsjonale. Grunngi at størrelsene er proporsjonale. Tegn en graf som viser sammenhengen mellom størrelsene.
- Gi et eksempel på en praktisk situasjon der to størrelser er omvendt proporsjonale. Grunngi at størrelsene er omvendt proporsjonale. Tegn en graf som viser sammenhengen mellom størrelsene.

9.3.11 (1PH23D1)

Hunder utvikler seg raskere enn mennesker. Når en hund er 1 år gammel, tilsvarer det 16 menneskeår. Se tabellen nedenfor.

Så gammel er hunden din	Små/mellomstore hunder	Store hunder	Veldig store hunder
To måneder	2 år	2 år	2 år
Fire måneder	6 år	6 år	6 år
Seks måneder	10 år	10 år	10 år
Åtte måneder	12 år	12 år	12 år
Ti måneder	14 år	14 år	14 år
1 år	16 år	16 år	16 år
1,5 år	20 år	20 år	20 år
2 år	24 år	24 år	24 år
3 år	29 år	30 år	31 år
4 år	34 år	36 år	38 år
5 år	39 år	42 år	45 år
6 år	44 år	48 år	52 år
7 år	49 år	54 år	59 år
8 år	54 år	60 år	66 år
9 år	59 år	66 år	73 år
10 år	64 år	72 år	80 år
11 år	69 år	78 år	87 år
12 år	74 år	84 år	94 år
13 år	79 år	90 år	101 år
14 år	84 år	96 år	108 år

Sondre har en hund som er 2 år gammel. Han mener funksjonen gitt ved kan brukes som en modell for hvor mange menneskeår en stor hund er når den er hundear.

- a) Forklar hvordan Sondre kan ha kommet fram til dette uttrykket, og argumenter for når modellen er gyldig.

Sondre påstår at modellen han har funnet, viser at alderen til en hund er proporsjonal med alderen til et menneske.

- b) Stemmer påstanden til Sondre?
Husk å argumentere for svaret ditt.

9.3.12 (1PH23D1)

På en nettside har Dennis funnet teksten nedenfor.

Verdifallet utgjør bilens største kostnad.

Verdifallet er i de aller fleste tilfellene størst det første året.

For en ny bil kan du vente et verdifall på 20% det første året. Deretter 14% av bruktpriisen det andre året, 13% det tredje året, osv., synkende til 10% det sjette året.

Fra og med det sjette året må du regne med et verdifall på 10% årlig.

Dennis vil kjøpe en ny bil som koster 490 000 kroner.

Sett opp et regnestykke som vil gi bilens verdi etter 2 år.

9.4 Teoretiske utvidelser

9.4.1

#programmering #lengden til en graf

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

- a) Finn $g(x) = f'(x)$.
- b) I [TM2](#) er formelen for lengden l til en graf gitt. Forklar hvilket tall l representerer når f og g er som gitt i denne oppgaven, og $a = -1$ og $b = 1$.
- c) Bruk en numerisk metode til for å finne en tilnærming for l . Drøft på forhånd hvilke hensyn som må tas for å unngå at skriptet feiler ved kjøring.

9.4.2

#følger og rekker #annuitetslån

Gitt et annuitetslån (se AM1) med lånebeløp L_0 , årlig rente $r\%$, og nedbetalingstid t . Lånet skal nedbetales med et årlig terminbeløp T .

- a) La L_n være resterende lånebeløp etter n -te nedbetaling. Forklar hvorfor

$$L_n = (1 + p)L_{n-1} - T$$

hvor $p = \frac{r}{100}$.

- b) Finn en formel for terminbeløpet T , uttrykt ved L_0 , t og p .

Annuitetslån blir ofte forklart med utgangspunkt i det vi her skal kalle *spareperspektivet* og *realverdiperspektivet*:

Spareperspektivet

Vi tenker oss at utlåner oppretter en sparekonto med $r\%$ årlig rente. I t år tilføres sparekontoen et årlig innskudd T . Dette skal gi samme resultat som hvis L_0 hadde blitt satt på sparekonto umiddelbart og forrentet i t år.

Nåverdiperspektivet

Året før nedbetalingen starter setter vi som basisår, og vi tenker at kroneverdien har økt, og vil øke, med $r\%$ hvert år etter basisåret. Summen av realverdiene til alle terminbeløp skal da tilsvare L_0 .

- c) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og forklar hva de to sidene i likningen beskriver ut ifra spareperspektivet.
- d) Ta utgangspunkt i likningen merket med (*) i løsningsforslaget, og lag en likning som beskriver nåverdiperspektivet.

9.4.3

#rasjonale funksjoner #funksjonsdrøfting #digital graftegning

Definer funksjonen

$$\frac{ax - b}{x - c}$$

i en digital graftegner (GeoGebra). Beskriv hva som skjer med grafen til f når du øker/minker én av a , b og c på intervallet $[-3, 3]$.

9.4.4 (R1H23D1)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2$$

Egil ønsker å lage et program som regner ut koordinatene til bunnpunktet på grafen til f . Han har skrevet koden nedenfor.

```
1 def f(x):
2     return 2*x**2 - 9*x - 2
3
4 def df(x, h):
5     return (f(x+h) - f(x))/h
6
7 h = 0.001
8 a = 0
9
10 while df(a, h) < 0:
11     a = a + 1
12
13 print("Bunnpunktet er ", (a, f(a)))
```

Utdata

Bunnpunktet er (3, -11)

a) Forklar hvilken strategi Egil har brukt.

Svaret han får er ikke rett.

b) Foreslå en endring i koden som vil gi Egil et riktigere svar.

9.4.5 (R1V23D1)

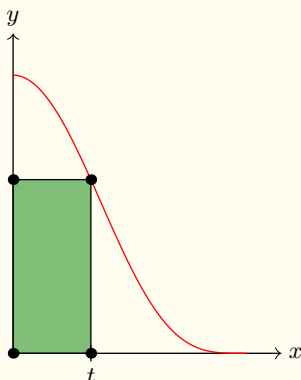
En elev har fått følgende oppgave:

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 9)^4, \quad x \in (0, 3)$$

Et rektangel R har hjørne i $(0, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f(t))$ og $(0, f(t))$.

Bestem den verdien av t som gjør at R har størst areal.



For å løse oppgaven har eleven lagd følgende program:

```
1 def A(x):
2     return x*(x**2-9)**4
3
4 t = 0
5 d = 0.01
6
7 while A(t) < A(t+d):
8     t = t + d
9
10 print(t)
```

- Forklar strategien eleven har brukt.
- Løs oppgaven eleven har fått.

9.4.6 (R2V23D1)

En elev har skrevet følgende kode:

```
1 a=3
2 d=4
3
4 N = 10
5 S = 0
6
7 for i in range(N):
8     S = S + a
9     a = a + d
10
11 print(S)
```

- Forklar hva eleven vil regne ut.
- Hva blir resultatet når man kjører programmet, hvis N settes til 100 i linje 4?

Vedlegg

Vedlegg A: Funksjoner

9.1 Definisjonsmengde

Definisjonsmengden til en funksjon $f(x)$ er x -verdiene $f(x)$ er gyldige for.

9.2 Verdimengde

Verdimengden til en funksjon $f(x)$ er alle verdiene $f(x)$ kan ha. Verdimengden er bestemt av funksjonsuttrykket og funksjonens definisjonsmengde.

Språkboksen

Gyldighetsområdet til en funksjon oppgir for hvilke x -verdier funksjonen gir mening ut ifra den praktiske situasjonen den brukes i.

Vedlegg B: Tekster om anvendt matematikk

Størrelser og enheter	Reknefeil på sjukehus
Statistikk	SSB skole Derfor må du kunne statistikk
Økonomi	Dobbelt renteheving!
Digitale verktøy	Regnefeil på over 100 milliarder
Andre tema	Eratosthenes of Cyrene (engelsk)

Fasit

Kapittel 1

1.1.1 a) 484 000 m b) 91 000 m c) 2 402 000 m

1.1.2 a) 484 000 g b) 9 100 g c) 240 200 g

1.1.3 a) 48 l b) 91 l c) 240 cl

1.1.4

a) 0,0124 km

f) 0,097 hg

k) 8,9 l

b) 4,2 m

g) 0,00015 g

l) 69 140 cl

c) 581,5 mm

h) 141 900 mg

m) 15 000 ml

d) 7,4 m

i) 0,00031 hg

n) 9,18 l

e) 15 cm

j) 0,064039 kg

o) 55 ml

1.2.1 720 cm³

1.2.2 a) 32 dm³ b) 32 l

1.2.3 a) 120 cm³ b) 0,12 l

1.3.3 a) Ca. 10,19 m/s b) Han startet med 0 m/s som fart, og trengte de første metrene til å akselerere. c) Ca. 12,35 m/s.

1.4.1 Ca. 36,68 m/s og ca. 44,46 m/s

1.4.2 Skriv ned eksempel på et dyr, et insekt, en gjenstand eller annet som veier mellom 1-100 mg, cg, dg, g, dag, hg og kg.

Kapittel 2

2.3.1 a) 2 b) 3 c) 5

2.3.2 a) 8 b) 6 c) $\frac{67}{11}$

2.3.3 a) 5, 8 og 16 b) 8 c) 8,5

2.3.4 a) 5 og 11 b) 8,5 c) 9

2.3.5 a) 3,2 b) 4185,48 c) Medianen

2.3.6 Se løsningsforslag.

2.3.7 Se løsningsforslag.

2.3.8

2.3.9

2.3.10

- a) I undersøkelse 1 har hver verdi frekvens lik 1, og da er det unødvendig å lage en frekvenstabell. Punktene i undersøkelse 3 gir samme informasjon som en frekvenstabell. Informasjonen gitt i undersøkelse 4 er allerede gitt i form av en frekvenstabell.
- b) vist søylediagram bare for undersøkelse 2 og 3?
- c) vist sektordiagram bare for undersøkelse 2 og ?
- d) vist linjediagram bare for undersøkelse 4?

2.3.13 Spredningsmål gir bare mening for tallverdier.

Kapittel 3

3.1.1 a) 6 b) 15 c) 42 d) 80

3.1.2 a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{48}{77}$ c) $\frac{9}{65}$

3.1.3 320 000 kr

3.2.1 a) 78% b) 91,2% c) 0,7% d) 193,54%

3.2.2 a) 0,57 b) 0,981 c) 2,19 d) 0,003

3.2.1 a) 70% b) 22% c) 36% d) 145%

3.2.4 a) 100 b) 250 c) 63 d) 560 e) 30

3.2.5 a) 40% b) 25% c) ca 42,86% d) ca 22,22%

3.2.6

3.2.7 a) 44 b) 325 c) 1008 d) 649 e) 200

3.2.8 a) 36 b) 175 c) 112

3.2.9 21 600 kr

3.2.10 17 600 kr

3.2.11 (iii)

3.3.1 a) 1,1 b) 1,3 c) 2

3.3.2 a) 0,9 b) 0,7 c) 0,2

3.3.3 a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{4}{12}$ Merk: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

3.3.3 5 cl

3.3.5 20

3.3.6 Ca. 18 g

Kapittel 4

4.1.1 a) ca. 1,4 b) ca. 1,021 c) ca. 0,945

4.1.2 a) 2017: 464 454 kr, 2012: 436 635 kr b) 2017

4.2.1 a) 20 000 kr b) 120 000 kr c) 2 400 kr d) 22 400 kr

4.2.2 Renter: 2 000 kr, avdrag: 5 783 kr

4.2.3 Figur (a) skisserer et serielån fordi avdragene er like. Figur (b) skisserer et annuitetslån fordi terminbeløpene er like.

4.2.4 63 000 kr

4.2.5 0,2 prosentpoeng og 10%.

4.2.6 a) 55 000 kr b) 60 500 kr c) 33 000 kr

4.3.1 a) 210 300 kr b) 48 369 kr

4.3.2 Mira: 16 200 kr, Børge: 17 850 kr

4.3.3 Trinn 1: ca. 965 kr, Trinn 2: ca 3699 kr (totalt ca. 4664 kr)

4.3.4 279 117 kr

4.4.1

a)

Inntekter	Budsjett
Nettolønn	23 000
<i>Sum</i>	23 000

Utgifter	
Leia av hybel	6 000
Mat	4 500
Annet	1 500
<i>Sum</i>	12 000

Resultat	11 000
----------	--------

b)

Inntekter	Budsjett	Regnskap	Avvik
Lønn	23 000	23 000	0
FLAX-gevinst	0	1 000	1 000
<i>Sum</i>	23 000	24 000	1 000

Utgifter			
Leia av hybel	6 000	6 000	0
Mat	4 500	5 500	-1 000
Annet.	1 500	1 800	-300
FLAX-lodd	0	100	-100
<i>Sum</i>	12 000	13 400	-1 400

Resultat	11 000	11 600	-400
----------	--------	--------	------

11 600 kr i overskudd. Overskuddet 400 kr *mindre* enn budsjettet.

Kapittel 5

5.2.1 a) $\frac{13}{52}$ b) $\frac{26}{52}$ c) $\frac{52}{52} - \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$, $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$

5.2.2 a) $\frac{4}{52}$ b) $\frac{13}{52}$ c) $\frac{16}{52}$ d) $\frac{36}{52}$

Kapittel 6

6.1.1 Ola: 40 000 kr, Kari: 80 000 kr

6.1.2 a) $7x + 2 = 3,4$ b) $x = 0,2$

6.1.3 a) $28x = 252$ b) $x = 9$

6.1.4 a) $\frac{25}{100}x = 845$ (eller $\frac{1}{4}x = 845$) b) $x = 3380$

6.1.5 a) $\frac{20}{100}x = 360$ (eller $\frac{1}{5}x = 360$) b) 1800 kr

6.1.8 15 kr

6.1.9 a) 500 W b) $I^2 = \frac{P}{R}$

6.1.10 $h = \frac{2A}{a+b}$

6.1.11

a) $B = \frac{M+F-13}{2}$

b) $B = \frac{M+F+13}{2}$

c) $F = 2B - M + 13$

d) 190 cm

6.1.12 97,9

6.1.13 (6, 11)

6.1.14 (-2, 1)

6.1.15 a) 5GB b) Abonnement B

6.1.18 a) 1000 cm^3 b) Hun finner hvilke høyder hun kan velge for at volumet skal bli 500 cm^3

6.1.19 12 cm

6.1.20 a) (-1, 1) b) (-2, 0)

6.1.21 $a = 3, b = 7$

6.1.22 $x = -\frac{21}{37}, y = \frac{9}{37}$

6.1.23 11 kr

Gruble 7 1000 kr

Gruble 8 Se løsningsforslag.